

Формула включений-исключений

Формула включений-исключений для множеств A, B :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Формула включений-исключений для множеств A, B, C :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Пусть A_1, A_2, \dots, A_n — подмножества множества U . Обозначим

$$\begin{aligned} S_1 &:= \sum_{i=1}^n |A_i| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|, \\ S_2 &:= \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = |A_1 \cap A_2| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|, \\ &\vdots \\ S_{n-1} &:= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{n-1}}| = \\ &= |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}| + \dots + |A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n|, \\ S_n &:= |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Формула включений-исключений:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = S_1 - S_2 + \dots + (-1)^n S_{n-1} + (-1)^{n+1} S_n.$$

1. (а) Докажите, что если элемент x входит в k из множеств A_1, A_2, \dots, A_n , то в S_m он посчитан ровно C_k^m раз.

(б) (напоминание) $C_k^0 - C_k^1 + \dots + (-1)^k C_k^k$ равно нулю для $k \geq 1$ и единице для $k = 0$.

(в) Докажите, что в сумме $S_1 - S_2 + \dots + (-1)^n S_{n-1} + (-1)^{n+1} S_n$ каждый элемент из множества $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ посчитан ровно 1 раз, а каждый элемент не из этого объединения посчитан ровно 0 раз. Выведите из этого формулу включений-исключений.

2. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC ?

3. Для натуральных a, b, c докажите равенство $[a, b, c] = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b)(b, c)(c, a)}$.
4. Куб со стороной 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1 \times 20 \times 20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоёв.
5. Обозначим через $T(n) = 1 + 2 + \dots + n$. Докажите, не прибегая к явной формуле для $T(n)$, что

$$T(n) = T(a) + T(b) + T(c) - T(a+b-n) - T(b+c-n) - T(c+a-n) + T(a+b+c-2n).$$

6. Найдите значение суммы

$$n^n - C_n^1(n-1)^n + C_n^2(n-2)^n - C_n^3(n-3)^n + \dots + (-1)^n C_n^n(n-n)^n.$$