

Задачи со сдвигом

1. Андрей, Витя и Женя живут на новейшей серобуромалиновой ветке метро: Витя находится на станции ровно посередине по числу перегонов между Андреем и Женей. На этой очень длинной ветке расположено 2026 станций. Они заметили, что если проезжать 12, 15 или 40 перегонов, то время пути не зависит от начальной станции (но зависит от числа перегонов). Докажите, что Витя добирается до станции Андрея столько же времени, что и до станции Жени.
2. Можно ли расставить по кругу 999 различных целых чисел так, чтобы сумма каждых 17 подряд идущих чисел равнялась 100 или 101?
3. Несколько мудрецов выстроились в колонну. На всех были либо чёрные, либо белые колпаки. Оказалось, что среди любых 10 подряд идущих мудрецов поровну мудрецов с белыми и чёрными колпаками, а среди любых 12 подряд идущих — не поровну. Какое наибольшее количество мудрецов могло быть?
4. Клетки таблицы 7×5 заполнены числами так, что в каждом прямоугольнике 2×3 (вертикальном или горизонтальном) сумма чисел равна нулю. Заплатив 100 рублей, можно выбрать любую клетку и узнать, какое число в ней записано. Какого наименьшего числа рублей хватит, чтобы наверняка определить сумму всех чисел таблицы?
5. В клетках квадрата 13×13 расставлены нули и единицы. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 сумма чисел четна, а в любом кресте из 5 клеток сумма чисел нечётная. Докажите, что сумма чисел в углах нашего квадрата 13×13 делится на 4.
6. На бесконечной клетчатой плоскости часть клеток закрасили. Оказалось, что в любом клетчатом прямоугольнике $m \times n$ (или $n \times m$) есть ровно одна закрашенная клетка. При каких m и n это возможно?
7. В клетчатом деревянном квадрате 102 клетки намазаны чёрной краской. Петя, используя квадрат как печать, 100 раз приложил его к белому листу, и каждый раз эти 102 клетки (и только они) оставляли чёрный отпечаток на бумаге. Мог ли в итоге на листе получиться квадрат 101×101 , все клетки которого, кроме одной угловой, чёрные?