Теоретико-числовые инварианты в комбинаторике

1. В вершинах куба расставлены числа: семь нулей и одна единица. За один ход разрешается прибавить по единице к числам в концах любого ребра куба. Можно ли добиться того, чтобы все числа делились на 7?

2. По кругу растут $n \geqslant 3$ деревьев, на каждом из которых изначально сидит по одному весёлому чижу. Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). При каких n все n чижей смогут собраться на одном дереве?

3. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

4. На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и, умноженная на 8, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 100!. Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 10!?

5. Дан изначально белый квадрат 2000×2000. За ход разрешается:
• закрасить белую клетку, если все соседние по стороне клетки белые;
• закрасить белую доминошку 1×2, если среди примыкающих к ней стороной клеток ровно две закрашены;
• закрасить белый квадрат 2×2, если все 8 соседних с ним по стороне клеток закрашены (и лежат внутри квадрата 2000×2000).
Получится ли закрасить все клетки квадрат этими операциями?

6. На доске написаны числа $10, 11, \ldots, 2026$. За одну операцию разрешается взять два числа a, b и заменить их на число $ab - a - b - 5$. Можно ли такими операциями добиться, чтобы на доске осталось только число вида $n!$, где $n > 10$ — некоторое натуральное число?

7. На доску записывают пары целых чисел. Изначально на доске записана единственная пара $(1, 2)$. Разрешается дописывать на доску новые пары по следующим правилам:
• если есть пара (a, b), можно дописать $(-a, -b)$;
• если есть пары (a, b) и (c, d), можно дописать $(a + c, b + d)$;
• если есть пара (a, b), можно дописать $(-b, a + b)$.
Могла ли через некоторое время на доске получиться пара $(2022, 2023)$? Порядок чисел в паре важен; например, пары $(1, 2)$ и $(2, 1)$ — различные.

ТЧ-инварианты в комбинаторике. Добавка

1. Последовательность a_n натуральных чисел задаётся первым членом $a_1 > 100$ и соотношением $a_{k+1} = a_k^2 - 1$ при всех натуральных k. Может ли так оказаться, что любое простое число будет делителем какого-то члена этой последовательности?

2. Есть три печатающих автомата. Первый по карточке с числами a и b выдает карточку с числами $a+1$ и $b+1$; второй по карточке с четными числами a и b выдает карточку с числами $a/2$ и $b/2$; третий автомат по паре карточек с числами a, b и b, c выдает карточку с числами a, c. Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих автоматов из карточки $(5, 19)$ получить карточку $(1, 1988)$?

3. В строку выписаны 200 натуральных чисел. Среди любых двух соседних чисел строки правое либо в 9 раз больше левого, либо в 2 раза меньше левого. Может ли сумма всех этих 200 чисел равняться 24^{2022}?