Индукция в алгебре

1. Найдите значения выражений
(а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$; **(б)** $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!$.

2. Докажите неравенства **(а)** $2^n>n$ при всех натуральных n;
(б) $2^n>n^2$ при натуральных $n>4$;
(в) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}<1$ при всех натуральных n.

3. Какое из двух чисел больше: **(а)** $2^{2^{\cdots^{2}}}$ (n двоек) или $3^{3^{\cdots^{3}}}$ ($n-1$ тройка);
(б) $3^{3^{\cdots^{3}}}$ (n троек) или $4^{4^{\cdots^{4}}}$ ($n-1$ четверка)?

4. Докажите, что существует 100-значное число, делящееся на 2^{100}, в десятичной записи которого участвуют только цифры 1 и 2.

5. Для всякого ли натурального n можно расставить первые n натуральных чисел в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, расположенных между ними?

6. Определим числа K_n: $K_0=1$ и $K_{n+1}=1+\min(2K_{[n/2]},3K_{[n/3]})$. Докажите, что $K_n\geqslant n$.

7. Существуют ли такие натуральные числа $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{100}$, что $[a_1,a_2]>[a_2,a_3]>\cdots>[a_{99},a_{100}]$?

8. Назовём натуральное число *ровным*, если в его записи все цифры одинаковы (например: $4, 111, 999999$). Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n+1$ ровных чисел.