Алгебраические свойства C_n^k

Напоминание: символом C_n^k обозначается количество k-элементных подмножеств в n-элементном множестве. Для всех $0 \leqslant k \leqslant n$ справедливо равенство

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

В этом листике предлагается доказать несколько стандартных соотношений и оценок на числа C_n^k. Для большинства из них известны несколько естественных доказательств, в том числе:
- комбинаторная интерпретация частей равенства;
- использование явной формулы;
- индукция с применением свойства треугольника Паскаля: $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$;
- удачная подстановка в бином Ньютона:

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^k x^n y^{n-k} + \ldots + C_n^n y^n.$$

0. (*Обсуждается в начале занятия*) Справедливы равенства

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n, \quad C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots = 2^{n-1}.$$

1. Докажите, что **(а)** $C_n^k \cdot k = C_{n-1}^{k-1} \cdot n$; **(б)** $C_n^m \cdot C_m^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}$.

2. Докажите формулу суммирования
(а) $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n = 3^n$;
(б) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$;
(в) $C_n^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k$;
(г) $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k$;
(д) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$;
(е) $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots = F_{n+1}$, где $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

3. Найдите значение суммы
(а) $\dfrac{C_n^0}{1} + \dfrac{C_n^1}{2} + \dfrac{C_n^2}{3} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{n+1}$;
(б) $C_n^0 + 2C_n^2 + 2^2 C_n^4 + 2^3 C_n^6 + \ldots + 2^k C_n^{2k} + \ldots$
(в) $C_n^0 C_m^k + C_n^2 C_m^{k-2} + C_n^4 C_m^{k-4} + C_n^6 C_m^{k-6} \ldots$.

4. Докажите неравенства **(а)** $C_{2n}^n \geqslant 4^n/(2n)$, **(б)** $C_{2n}^n \geqslant 4^n/(2\sqrt{n})$.

5. (*Final Boss*) Найдите значение суммы

$$\frac{C_k^k}{2^k} + \frac{C_{k+1}^k}{2^{k+1}} + \frac{C_{k+2}^k}{2^{k+2}} + \ldots + \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}.$$