

## Алгебраические тождества

1. Попарно различные вещественные числа  $a, b, c$  таковы, что  $a^3 - 3a = b^3 - 3b = c^3 - 3c$ . Вычислите (а)  $a^2 + ab + b^2$ ; (б)  $a + b + c$ ; (в)  $a^2 + b^2 + c^2$ .
2. Верно ли, что к значению произведения любых двух последовательных натуральных чисел всегда можно приписать две цифры справа таким образом, чтобы получился точный квадрат?
3. Сколько существует таких упорядоченных пар натуральных чисел, что произведение чисел в паре ровно на 1000 больше их суммы?
4. Целые числа  $a, b$  и  $c$  таковы, что  $a + b + c = 0$ . Докажите, что  $a^4 + b^4 + c^4$  — это удвоенный квадрат целого числа.
5. Положительные числа  $a, b, c, d$  в произведении дают 1. Докажите, что
$$\frac{1}{1+a+ab+abc} + \frac{1}{1+b+bc+bcd} + \frac{1}{1+c+cd+cda} + \frac{1}{1+d+da+dab} = 1.$$
6. Натуральные числа  $a, b, c, d$  удовлетворяют соотношению  $ab = cd$ . Докажите, что число  $a + b + c + d$  — составное.
7. Длины  $a, b, c$  сторон некоторого треугольника удовлетворяют равенству

$$2 \cdot (a^8 + b^8 + c^8) = (a^4 + b^4 + c^4)^2.$$

Докажите, что один из углов треугольника — прямой.

8. Известно, что число  $n$  есть сумма квадратов трёх натуральных чисел. Докажите, что число  $n^2$  тоже можно представить в виде суммы квадратов трёх натуральных чисел.