

## Между квадратами

1. Докажите, что  $2026^{2026} + 30^{2026}$  не является точным квадратом.
2. Найдите все пары натуральных чисел  $m$  и  $n$ , при которых оба числа  $m^2 + 2n$  и  $n^2 + 2m$  являются точными квадратами.
3. Пусть  $a$  и  $b$  — некоторые положительные числа. Для каждого натурального  $n$  число  $\sqrt{an + b}$  округлили до ближайшего целого. Могли ли все округления быть в одну сторону?
4. (а) Решите в целых числах уравнение  $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$ .  
(б) Решите в целых числах уравнение  $x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$ .
5. (а) Найдите все натуральные  $n$  такие, что числа  $n + 3$  и  $4n + 1$  являются квадратами натуральных чисел.  
(б) Найдите все натуральные  $n$ , для которых числа  $5n - 1$  и  $13n - 1$  являются точными квадратами, а число  $7n - 3$  — простое.  
(в) Найдите все натуральные  $n$  такие, что числа  $12n + 1$  и  $75n + 49$  являются квадратами натуральных чисел.
6. Докажите, что ни при каком натуральном  $n$  число

$$(1^4 + 1^2 + 1)(2^4 + 2^2 + 1) \dots (n^4 + n^2 + 1)$$

не является точным квадратом.

7. Будем говорить, что мы *укоротили* число, если стерли его последнюю цифру. Натуральное число, большее миллиона, таково, что если укоротить его, получится квадрат натурального числа, если укоротить этот квадрат, получится куб натурального числа, укоротив этот куб, получим четвёртую степень натурального числа, а, укоротив эту четвёртую степень, получим пятую степень натурального числа. Докажите, что если укоротить эту пятую степень, то получится шестая степень натурального числа.