Принцип крайнего

1. На доску выписаны 2026 чисел. Оказалось, что сумма любых трех выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел?

2. В Чикаго жили 25 гангстеров. Как-то раз каждый из них выстрелил в ближайшего гангстера. Докажите, что есть хотя бы один гангстер, в которого никто не стрелял. (Попарные расстояния между гангстерами различны).

3. В вершинах n-угольника расставлены m фишек ($m > n > 2$). За ход можно выбрать какую-нибудь вершину, в которой хотя бы две фишки, забрать из неё две фишки и добавить по одной фишке к её соседним вершинам. Докажите, что если через несколько ходов в каждой вершине будет находиться столько же фишек, сколько в ней было изначально, то количество совершённых ходов будет кратно n.

4. На полях шахматной доски расставлены натуральные числа, причём никакое число не встречается дважды. Докажите, что есть пара соседних по стороне клеток, числа в которых отличаются не меньше, чем на 5.

5. В лесу в шеренгу выстроились лисы и волки. Любой зверь, стоящий между двумя лисами, дружит хотя бы с одной из них. Докажите, что точно есть два зверя, стоящие рядом, которые в совокупности дружат со всеми лисами. (Считается, что зверь дружит сам с собой).

6. Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на его стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадёт на сторону.

7. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

8. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается один раз, например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3).