

Конструктивы в ТЧ

1. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = 2026$ имеет бесконечно много решений в целых числах.
2. Существуют ли 100 рациональных чисел таких, что произведение любых двух не является целым числом, а произведение любых трёх является целым?
3. Сколько натуральных чисел, меньших 2026, представляются в виде

$$n = \text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) + \text{НОК}(a, c),$$

где a, b, c некоторые натуральные числа?

4. Докажите, что у уравнения
(а) $x^{10} + y^{10} + z^{10} = w^{11}$;
(б) $x^9 + y^{10} = z^{11}$;
есть решение в натуральных числах.
5. Докажите, что найдутся 2026 таких целых числа $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$, по модулю больших 100000, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2026}} = \frac{1}{a_1 \dots a_{2026}}.$$

6. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.
7. Числа m и n назовём *похожими друг на друга*, если у них совпадают множества простых делителей. Числа m и n назовём *очень похожими*, если во-первых, m и n похожи друг на друга, а во-вторых, $m + 1$ и $n + 1$ похожи друг на друга. Докажите, что пар различных очень похожих натуральных чисел бесконечно много.