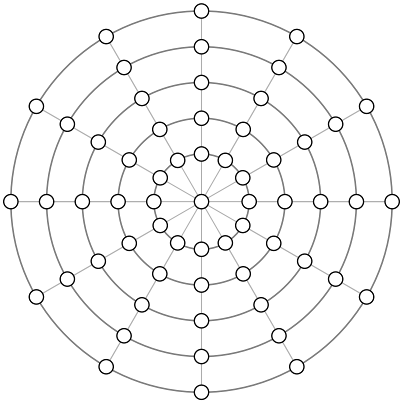
Очный отбор для 7 класса, решения и критерии

Задача 1. В палитре 16 цветов. Можно ли раскрасить все кружочки на картинке справа в цвета палитры так, чтобы для любых двух различных цветов палитры нашлись два соседних (т. е. соединённых линией) кружочка, раскрашенных в эти два цвета?



Ответ: Нет.

Решение. Заметим, что на рисунке всего $5 \cdot 12 = 60$ линий, соединяющих кружочки вдоль радиусов окружностей, а также $12 \cdot 5 = 60$ линий, соединяющих кружочки вдоль дуг окружностей. Итого $60 + 60 = 120$ линий. С другой стороны, количество пар различных цветов тоже равно $\dfrac{16 \cdot 15}{2} = 120$.

Предположим, что нам удалось раскрасить картинку согласно условию. Тогда для каждой пары различных цветов существует единственная линия, соединяющая кружочки, покрашенные в эти цвета. Значит, количество линий, выходящих из кружочков каждого цвета, должно быть равно 15. Однако, имеется только 12 кружочков с нечётным числом линий. Тогда найдётся цвет, все кружочки которого имеют чётное число линий, а значит общее число линий из кружочков этого цвета не может быть равно 15. Противоречие.

Альтернативное решение. Заметим, что на картинке есть один центральный кружочек с 12 соседями, внешние двенадцать кружочков с 3 соседями и оставшиеся сорок восемь кружочков с 4 соседями. Предположим, что нам удалось раскрасить картинку согласно условию. В цвет центрального кружочка должен быть покрашен ещё хотя бы один другой кружочек, иначе у кружочков этого цвета меньше 15 соседей. Тогда оставшиеся $12 + 48 - 1 = 59$ кружочков раскрашены в 15 цветов, а значит найдётся цвет, в который покрашены не более 3 из оставшихся кружочков. Тогда кружочки этого цвета имеют не больше $3 \cdot 4 = 12$ соседей — противоречие. □

Критерии

- Верно посчитано количество линий и пар разных цветов — 3 балла.

Задача 2. Про натуральные числа a, b, c известно, что a^3 делится на b, b^3 делится на c и c^3 делится на a. Докажите, что $(a+b+c)^{13}$ делится на abc.

Решение. Заметим, что a^9 делится на c, так как $a^9 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \;\vdots\; b \cdot b \cdot b = b^3 \;\vdots\; c$. Аналогично $b^9 \;\vdots\; a$ и $c^9 \;\vdots\; b$.

Рассмотрим слагаемые, получающиеся при раскрытии скобок в выражении $(a+b+c)^{13}$. Они имеют вид $a^i b^j c^k$, где $i+j+k = 13$. Докажем, что каждое такое слагаемое делится на abc. Рассмотрим 3 случая:

- $i, j, k \geqslant 1$.
  В этом случае очевидно, что $a^i b^j c^k$ делится на abc.
- $j = k = 0$ (случаи $i = k = 0$ и $i = j = 0$ аналогичны).
  Тогда $a^i b^j c^k = a^{13} = a \cdot a^3 \cdot a^9 \;\vdots\; a \cdot b \cdot c$.
- $k = 0, i, j \geqslant 1$ (случаи только $i = 0$ и только $j = 0$ аналогичны).
  Если $j \geqslant 4$, то $a^i b^j = a^i \cdot b^{j-3} \cdot b^3 \;\vdots\; a \cdot b \cdot c$. Иначе $i > 9$, и $a^i b^j = a^{i-9} \cdot b^j \cdot a^9 \;\vdots\; a \cdot b \cdot c$.

Таким образом, после раскрытия скобок каждое слагаемое делится на abc, а значит и исходное выражение делится на abc.

Альтернативное решение. Рассмотрим произвольное простое число p. Пусть его степени вхождения в числа a, b и c равны k, l и m соответственно. Из условия следует, что $3k \geqslant l$, $3l \geqslant m$ и $3m \geqslant k$. Пусть число k является наименьшим из чисел k, l и m (без ограничения общности). Тогда $a+b+c$ делится на p^k, так как каждое из трёх слагаемых на это число делится. Тогда $(a+b+c)^{13}$ делится на p^{13k}. С другой стороны, из неравенств $l \leqslant 3k$ и $m \leqslant 3l \leqslant 9k$ следует, что степень вхождения простого множителя p в каноническое разложение числа abc не более $k + 3k + 9k = 13k$.

Получили, что для каждого простого числа p степень его вхождения в разложение числа $(a+b+c)^{13}$ на простые множители не меньше, чем в число abc. Из этого следует, что $(a+b+c)^{13}$ делится на abc.

□

Критерии

- В решении есть идея доказывать, что каждый моном делится на abc. При этом в доказательстве существенно используется неверный факт, что если моном делится на a, на b и на c, то он делится на произведение abc — не более 2 баллов.

  Следующие два критерия суммируются.
- Доказано, что a^{13}, b^{13} и c^{13} делятся на abc — 1 балл.
- Указано, что в разложении есть мономы, в которые входит каждая из переменных, и эти мономы делятся на abc — 1 балл.

Задача 3. В офисе лежат 1000 листов бумаги, изначально разложенных по 79 стопкам. Стопки выложены в ряд слева-направо. Некоторые стопки могут быть пусты, но не все листы находятся в одной стопке. Работник офиса может выполнять следующую операцию: выбрать любую стопку и переложить из неё либо 13, либо 66 листов (если в ней есть столько листов) в любую другую стопку. Оказалось, что такими операциями **невозможно** собрать все листы в одной стопке. Сколько листов могло быть изначально в самой левой стопке? (Укажите все возможные варианты.)

Ответ: $12, 25, 38, 51, 64$

Решение. Пусть есть стопка с хотя бы 65 листами. Найдём другую непустую стопку. За 5 операций переложим 65 листов из нашей стопки в неё, а потом одной операцией переложим 66 листов обратно. Повторяя этот алгоритм, соберём всё в одной стопке.

Попробуем собрать как можно больше листов в первой стопке: если есть кучка с хотя бы 13 листами, то переложим их в первую. Пусть после таких операций в первой стопке осталось a листов. По предыдущему наблюдению $a \leqslant 64$, иначе мы могли бы собрать все листы в первой стопке. С другой стороны, всего листов не больше $a + 12 \cdot 78 \leqslant 64 + 12 \cdot 78 = 1000$. Такое возможно только в одном случае: когда на текущий момент в первой стопке ровно 64 листа, а во всех остальных — ровно по 12.

Нетрудно сообразить, что все распределения бумаги, из которых можно получить распределение $(64, 12, 12, \ldots, 12)$, устроены так: в каждой стопке снизу лежат по 12 листов, которые никогда не перекладываются, и ещё в каких-то стопках лежат 4 блока по 13 листов, причём эти блоки можно свободно перемещать между стопками. Тогда изначальное количество листов в каждой стопке могло быть $12, 25, 38, 51, 64$. $\square$

Критерии

Следующие продвижения суммируются:

- Доказано, что при наличии стопки, в которой есть $\geqslant 65$ листов, можно всё собрать в этой стопке — 3 балла.
- Замечено, что $64 + 12 \cdot 78 = 1000$ — 1 балла.
- Доказывается, что подходящие распределения — это {64 и 78 раз по 12} и всё что из него получается — 2 балла.
- Есть верный ответ — 1 балл.

Задача 4. Натуральные числа x и y удовлетворяют соотношению $2x^2 + x = 3y^2 - y$. Докажите, что $x + y$ — точный квадрат натурального числа.

Решение. Перенесём $2y^2 - y$ в левую часть, получим:

$$y^2 = 2x^2 - 2y^2 + x + y = (x + y)(2x - 2y + 1).$$

Докажем, что числа $x + y$ и $2x - 2y + 1$ взаимно просты. Предположим, что это не так: пусть у чисел $x + y$ и $2x - 2y + 1$ есть общий простой делитель p. Из разложения выше видно, что число y^2 делится на скобку $(x + y)$, то есть делится на p. Тогда и само число y делится на p, ведь p — простое. Раз оба числа $x + y$ и y делятся на p, то число x тоже делится на p. Но число $2x - 2y + 1$ не может делиться на p, так как $2x - 2y + 1 \equiv 0 - 0 + 1 = 1 \pmod{p}$. Противоречие.

Раз $y^2 = (x + y)(2x - 2y + 1)$ и числа $x + y$ и $2x - 2y + 1$ взаимно просты, то они оба — точные квадраты.

$\square$

Критерии

- Получено разложение $y^2 = (x+y)(2x-2y+1)$ — 2 балла.

Задача 5. У Эша и Ритчи есть по 100 покемонов. Каждый из покемонов относится к одной из четырёх стихий: огонь, вода, лёд или электричество. В ходе турнира все покемоны Эша разбиваются на пары с покемонами Ритчи и внутри каждой пары проводится поединок. Известно, что электрический покемон всегда побеждает водного, водный всегда побеждает огненного, а огненный — ледяного; при этом поединок в любой другой паре покемонов заканчивается вничью. (Например, результат поединка между электрическим и ледяным покемоном будет ничейным, как и результат поединка между двумя огненными покемонами.)

Выяснилось, что если Эш будет составлять пары покемонов, то он может их составить так, чтобы его покемоны одержали не менее n побед; и что если Ритчи будет составлять пары покемонов, то его покемоны одержат не менее n побед. При каком наибольшем натуральном n такое возможно?

Ответ: 75

Решение. Пример. Пусть у каждого мальчика есть ровно по 25 покемонов каждой из стихий. Тогда очевидно, что каждый из них может гарантировать себе хотя бы 75 побед.

Оценка. Рассмотрим ориентированный граф, вершины которого — все 200 покемонов. Для каждого поединка, составленного Эшем, проведём синюю стрелку от победителя к проигравшему, если в этом поединке победил покемон Эша (а если покемон Ритчи, синюю стрелку не рисуем). Для каждого поединка, составленного Эшем, проведём красную стрелку от победителя к проигравшему, если в этом поединке победил покемон Ритчи (а если покемон Эша, красную стрелку не рисуем).

По построению в полученном ориентированном графе из каждой вершины выходит не более одной стрелки и в каждую входит не более одной стрелки. Любой такой граф представляет собой объединение нескольких непересекающихся ориентированных цепей и ориентированных циклов.

Но в графе из нашей задачи на самом деле не будет циклов, и не будет цепей, состоящих из пяти и более вершин. Действительно: при обходе цепи/циклы стихии покемонов будут меняться в порядке Э $\to$ В $\to$ О $\to$ Л, и продлить такую цепь не получится.

Раз наш граф — это объединение непересекающихся цепей из не более чем 4 вершин, то этих цепей хотя бы $200/4 = 50$. В каждой цепи найдётся вершина, из которой не выходит ни одной стрелки — это есть покемон, который не принёс победы ни Эшу в пейринге Эша, ни Ритчи в пейринге Ритчи. Получается, что суммарное число побед Эша в составленных им поединках и побед Ритчи в составленном их поединках не превосходит $200 - 50 = 150$. Имеем $2n \leqslant 150$, то есть $n \leqslant 75$.

Альтернативная оценка. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — число электрических, водяных, огненных и ледяных покемонов у Эша соответственно, b_1, b_2, b_3, b_4 — число электрических, водяных, огненных и ледяных покемонов у Ритчи соответственно. Максимальное число побед, которых может добиться Эш, равно $\min(a_1, b_2) + \min(a_2, b_3) + \min(a_3, b_4) \geqslant n$. Аналогично, максимальное число побед, которых может добиться Ритчи, равно $\min(b_1, a_2) + \min(b_2, a_3) + \min(b_3, a_4) \geqslant n$.

Для любых чисел x, y верно, что $\min(x, y) \leqslant x$.

Пользуясь этим свойством, получим следующие неравенства:

$$a_1 + a_2 + a_3 \geqslant n, \qquad b_1 + b_2 + b_3 \geqslant n.$$

Сложим их и воспользуемся тем, что всего покемонов 200:

$$\begin{gathered} a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 \geqslant 2n; \\ 200 - a_4 - b_4 \geqslant 2n; \\ a_4 + b_4 \leqslant 200 - 2n. \end{gathered}$$

Каждый минимум $\min(x, y)$ можно оценить сверху как числом x, так и числом y. Аналогично, выбирая оценивающую переменную по-другому, можно получить, что

$$a_3 + b_3 \leqslant 200 - 2n; a_2 + b_2 \leqslant 200 - 2n; a_1 + b_1 \leqslant 200 - 2n.$$

Сложим четыре полученных неравенства:

$$200 = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + a_4 + b_4 \leqslant 4(200 - 2n) \quad \Longrightarrow \quad n \leqslant 75.$$

$\square$

Критерии

Баллы за оценку и пример и суммируются

- Доказана оценка $n \leqslant 75$ — 6 баллов.
- Приведён пример ситуации для $n = 75$ — 1 балл.