Игра «Колонизаторы»

Геометрия

1. (3 балла) В четырёхугольнике $ABCD$ выполнено следующее: $AD \parallel BC$, $AB = BC$, $AC = CD$, $BC + CD = DA$. Выразите в градусах наибольший угол четырёхугольника.

2. (3 балла) В прямоугольном треугольнике длина высоты из вершины прямого угла равна четверти длины гипотенузы. Сколько градусов составляет наименьший угол треугольника?

3. (5 баллов) Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$), в котором $\angle A = 70°$. На его сторонах AB, AC, BC, BC отмечены точки X, Y, P, Q соответственно так, что $BX + BP = CY + CQ = BC$ (на стороне BC точки лежат в порядке $B - P - Q - C$). Выразите в градусах величину острого угла между прямыми XQ и YP.

4. (5 баллов) В треугольнике ABC известны длины двух сторон: $AB = 4$, $BC = 7$. Прямая, проведённая через середину стороны AC параллельно биссектрисе угла при вершине B, пересекает сторону BC в точке K. Найдите длину отрезка CK.

5. (8 баллов) В треугольнике ABC с углами $\angle A = 61°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 59°$ биссектрисы AD, BE, CF пересекаются в точке I. Какой из трёх отрезков DI, EI, FI самый длинный?

6. (11 баллов) Внутри квадрата $ABCD$ нарисован квадрат $AB'C'D'$ так, что точка B' лежит на стороне AB, а точка D' — на стороне AD (вершина A принадлежит обоим квадратам). Выразите в градусах $\angle BCB'$, если известно, что $AC' = 2D'D$.

7. (15 баллов) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено: $AD = BD = CD$, $\angle BDA = \angle ACD$, $\angle BAC = \angle CBD$. Выразите в градусах все четыре угла четырёхугольника.

Алгебра

1. (3 балла) Известно, что b — среднее арифметическое чисел a и c, причём $a - c = 10$. Чему может быть равно выражение $ab + bc - ac - b^2$?

2. (3 балла) Найдите значение выражения

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2024}\right)\left(1-\frac{1}{2025}\right).$$

3. (5 баллов) Число 2025 можно представить в виде суммы последовательных целых чисел различными способами, например $2025 = 403 + 404 + 405 + 406 + 407$ или $2025 = 1012 + 1013$. Какое наибольшее количество слагаемых может быть в таком представлении?

4. Какое наименьшее количество различных целых чисел нужно взять, чтобы среди них можно было выбрать как геометрическую, так и арифметическую прогрессию длины 5?

5. (8 баллов) Обозначим символом $H(n)$ сумму нечётных цифр числа n. Например, $H(48) = 0$, $H(5) = 5$, $H(1287) = 8$. Найдите сумму $H(1) + H(2) + \ldots + H(300)$.

6. (11 баллов) В строчку записано 100 чисел. Каждое число, начиная со второго, не меньше предыдущего; сумма всех чисел равна 10; сумма любых 30 чисел не меньше, чем 2. Какое наименьшее число может стоять на 96-м месте?

7. (15 баллов) Найдите все решения уравнения

$$\frac{1}{3x + \cfrac{1}{3x + \cfrac{1}{2y + \cfrac{1}{2y}}}} = \frac{2}{3}.$$

ТЧ

1. (3 балла) Найдите все трёхзначные числа, из цифр которых можно составить шесть различных двузначных простых чисел.

2. (3 балла) Натуральные числа a, b, c таковы, что $ab \,\vdots\, 2c$, $ac \,\vdots\, 3b$, $bc \,\vdots\, 5a$. Найдите тройку чисел a, b, c, при которой достигается наименьшее возможное значение abc.

3. (5 баллов) Найдите все тройки попарно различных цифр (a, b, c) таких, что

$$\overline{ab} \times c = a \times \overline{bc}$$

4. (5 баллов) Найдите три попарно различных натуральных числа таких, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел.

5. (8 баллов) Натуральные числа x, y таковы, что $x^2y + 1$ делится на $xy - 1$. Найдите все такие пары (x, y).

6. (11 баллов) Дробь $\dfrac{m + 2025n}{n + 2025m}$, где целые числа n и m взаимно просты, сокращается на d. Найдите максимальное d.

7. (15 баллов) Найдите все числа, равные сумме кубов своих цифр.

Комбинаторика

1. (3 балла) В ряд лежат 8 шариков: сначала 4 черных, потом 4 белых. Заплатив 1 рубль, можно перекрасить шарик в противоположный цвет, а за 60 копеек можно поменять местами два соседних шарика. Какую наименьшую сумму нужно заплатить, чтобы получить ряд, в котором сначала 4 белых, а потом 4 черных шарика?

2. (3 балла) Петя наполняет воду в два бассейна. Для этого он использует 4 шланга: 2 шланга типа A с одним напором и 2 шланга типа B с другим напором. Ровно в 10:00 Петя опустил 2 шланга типа A в первый бассейн, а 2 шланга типа B во второй бассейн и включил воду. Через некоторое время Петя заметил, что в первом бассейне воды в полтора раза больше, чем во втором и перенес один шланг из первого бассейна во второй. В 13:00 Петя заметил, что во втором бассейне воды в полтора раза больше, чем в первом. В какое время Петя перенес шланг?

3. (5 баллов) Сколько существует шестизначных чисел, у которых по три чётных и нечётных цифры?

4. (5 баллов) На столе лежат $n > 2$ кучек по одному ореху в каждой. Двое ходят по очереди. За ход нужно выбрать две кучки, где числа орехов взаимно просты, и объединить эти кучки в одну. Выиграет тот, кто сделает последний ход. При каких n второй игрок может выиграть независимо от действий первого?

5. (8 баллов) У Пети есть набор из n двухчашечных весов. Он знает, что среди них есть ровно 5 сломанных, но не знает, какие именно. А еще у Пети есть 3 одинаковые на вид монеты. Он знает, что одна из них фальшивая и легче остальных (которые равны по весу между собой), но не знает, какая именно. Пете удалось провести взвешивания на своих весах и определить, какая монета фальшивая. При каком наименьшем n это могло произойти?

6. (11 баллов) На столе в ряд стоит 40 чашек, занумерованных слева направо числами от 1 до 40. В каждой чашке лежит не более 10 вишен, а количество вишен в любых соседних чашках отличается ровно на один. В чашках с номерами $1, 4, 7, 10, \ldots, 40$ вместе 125 вишен. Какое наибольшее количество вишен может быть во всех чашках?

7. (15 баллов) Двое играют в следующую игру. Каждый игрок по очереди вычеркивает 9 чисел (по своему выбору) из последовательности $1, 2, \ldots, 100, 101$. После одиннадцати таких вычеркиваний останутся 2 числа. Первый игрок получает столько очков, каков модуль разности оставшихся чисел. Второй игрок стремится помешать первому игроку набирать очки. Сколько очков получит первый игрок, если оба игрока будут играть правильно?

Графы

1. (3 балла) На плакате изображен футбольный мяч, сшитый из нескольких лоскутков – белых шестиугольников и красных пятиконечных звёзд. Каждая звезда граничит только с пятью шестиугольниками, а каждый шестиугольник – только с тремя звёздами. Сколько всего лоскутков ушло на изготовление мяча, если по изображению можно установить, что их не меньше 30, но меньше 40?

2. (3 баллов) В некотором графе есть простые циклы (без самопересечений) из 3, 4, 5, 6, 7 и 8 ребер. Найдите минимальное число рёбер в таком графе.

3. (5 баллов) В графе с 20 вершинами любые 4 вершины можно обойти в некотором порядке, пройдя по трём рёбрам. Какое наименьшее число ребер может быть в этом графе?

4. (5 баллов) В графе 2025 вершин, при этом любой простой цикл состоит ровно из 3 рёбер. Какое наибольшее количество рёбер может быть в этом графе?

5. (8 баллов) У Карлсона есть тарелка с 50 плюшками и еще 49 пустых тарелок. За один ход он выбирает тарелку, в которой больше одной плюшки, и перекладывает часть из них (хотя бы одну, но не все) в пустую тарелку. После каждого хода Карлсон записывает в блокнот произведение количеств плюшек в двух использованных на этом ходу тарелках. Чему может быть равна сумма всех чисел в блокноте Карлсона, когда на каждой тарелке окажется по 1 плюшке? Укажите все варианты.

6. (11 баллов) В дереве 80 вершин. Найдите наибольшее возможное количество вершин с попарно различными степенями.

7. (15 баллов) В графе 3333 вершины, и для любых двух его вершин существует гамильтонов путь (то есть путь, проходящий через каждую из вершин графа ровно один раз) с концами в этих вершинах. Какое наименьшее число рёбер может быть у такого графа?