Числа Фибоначчи

Последовательность *чисел Фибоначчи* определяется начальными условиями $F_0 = 0, F_1 = 1$ и рекуррентным соотношением

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

для всех целых неотрицательных n.

1. Лягушка находится в левой клетке полоски $1 \times n$. Она умеет прыгать на одну или на две клетки вправо. Сколькими способами она может допрыгать до последней клетки?

2. Для всех натуральных n докажите тождество
(а) $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$;
(б) $F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;
(в) $F_{n+2} - 1 = F_n + F_{n-1} + \ldots + F_1$;
(г) $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$;
(д) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

3. Сколько существует представлений числа n в виде суммы нечётных слагаемых? Например, при $n = 6$ представления таковы: $1+1+1+1+1+1$, $3+1+1+1$, $1+3+1+1$, $1+1+3+1$, $1+1+1+3$, $1+5$, $3+3$, $5+1$.

4. **(а)** Докажите, что любые два соседних числа Фибоначчи взаимно просты.
(б) Докажите, что для любых натуральных m и n выполнено

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}.$$

(в) Докажите, что для любых натуральных m и n справедливо равенство

$$\text{НОД}(F_m, F_n) = F_{\text{НОД}(m,n)}.$$

(г) Дано натуральное число n. Пусть m — наименьшее натуральное число, для которого число F_m делится на n. Докажите, что число F_k делится на n тогда и только тогда, когда k делится на m.

5. **(а)** Докажите, что существует число Фибоначчи, делящееся на 997.
(б) Докажите среди любых 998 подряд идущих чисел Фибоначчи найдётся число, кратное 997.

6. Натуральные числа m и n не превосходят 2025 и удовлетворяют равенству

$$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1.$$

Найдите наибольшее возможное значение числа $m^2 + n^2$.