Зацикливание

1. В некоторой стране из каждого города выходит ровно одна односторонняя дорога в другой город, и в каждый город входит не более одной дороги. Докажите, что турист, выехавший из столицы, когда-то в неё вернётся.

2. Метеорологическая служба Цветочного города следит за погодой уже сто лет. Они подразделяют погоду на дождливую или солнечную. Метеорологи доказали, что погода на следующий день однозначно определяется (по какому-то загадочному принципу) погодой в предыдущие семь дней. Последняя неделя в Цветочном городе была полностью солнечная. Докажите, что в будущем снова встретится полностью солнечная неделя.

3. Кубик Рубика вывели из исходного состояния некоторой последовательностью поворотов граней. Докажите, что если повторять эту последовательность поворотов достаточно долго, то кубик в конце концов вернется в исходное состояние.

4. Напишем последовательность 2, 0, 2, 5, 9, 6, 2, 2, ..., в которой каждый новый член равен последней цифре суммы четырёх предыдущих. Докажите, что рано или поздно в последовательности встретится кусок
(а) 2, 0, 2, 5 (кроме начала); **(б)** 4, 8, 9, 1.
(в) Докажите, что количество членов последовательности между повторяющимися кусками 2, 0, 2, 5 (считая первый кусок 2, 0, 2, 5 и не считая второй) делится на 5.
(г) Докажите, что кусок 2, 0, 2, 5 встретится не позже чем через 5^5 членов в последовательности.

5. **(а)** В Тридевятом Царстве ни одна из дорог не заканчивается тупиком. Рыцарь, Любящий Постоянство, выезжает из своего замка и, доезжая до любого перекрёстка, едет по самой левой дороге. Докажите, что в конце концов он попадёт таким образом обратно в свой замок.
(б) В Тридесятом Королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что рыцарь вернётся в изначальный замок.

6. У Ивана есть неограниченный запас чёрных и белых кубиков. Он склеил из ab этих кубиков прямоугольник $a \times b$. Иван хочет положить кубики поверх данного прямоугольника так, чтобы получился параллелепипед $a \times b \times c$. Всегда ли он может выбрать c и так положить кубики, чтобы в полученном параллелепипеде каждый белый кубик граничил по стороне с чётным числом чёрных, а каждый чёрный — с нечётным числом белых?

7. Десять роботов держат в руках по кубику Рубика. Каждую секунду каждый робот проделывает некоторую фиксированную последовательность поворотов граней со своим кубиком (у каждого робота последовательность своя). Докажите, что через некоторое время кубики вернутся в исходное состояние.

8. Робот играет с двумя кубиками Рубика. Он по очереди подходит то к одному кубику, то ко второму. К первому кубику робот всё время применяет одну и ту же комбинацию поворотов. Комбинация, применяемая ко второму кубику, зависит от положения первого кубика в текущий момент. Докажите, что через какое-то время оба кубика одновременно вернутся в исходное положение.