Сравнения по модулю. Часть вторая

1. Про натуральные числа a, b, c, d, n известно, что $a+c$ и $b+d$ делятся на n. Докажите, что $ab-cd$ делится на n.

2. Докажите, что число $(2^n-1)^n-3$ делится на 2^n-3 при любом натуральном n.

3. Докажите, что $(a+c)^3(a+b)^3(a+d)^3+(b+c)^3(b+d)^3(c+d)^3$ делится на $a+b+c+d$ для любых натуральных a, b, c, d.

4. Докажите, что $n^{2a+3}+(n-1)^a$ делится на n^2-n+1 для любых натуральных a, n.

5. **(а)** Даны натуральные числа a, b. Оказалось, что ab делится на $a+b$. Докажите, что $a+b$ — составное.
(б) Даны натуральные числа a, b, c. Оказалось, что $b^2+c^2-a^2$ делится на $a+b+c$. Докажите, что $a+b+c$ — составное.

6. Докажите, что для натуральных $n, b > a > 1$ число $(2b-a)(ab-1)^n+a+2b$ составное.

7. Пусть $n > 3$ — натуральное число. Докажите, что если в записи натурального числа x в системе счисления с основанием n каждая цифра встречается ровно один раз, то x — составное.
Запись числа x в системе счисления с основанием n — это строка вида $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$, где все a_i (называемые *цифрами*) — целые числа от 0 до $n-1$, такие, что $x = n^k a_k + n^{k-1} a_{k-1} + \ldots + n a_1 + a_0$.

8. Докажите, что для натурального $a > 2$ число $(2a+1)^{2025}-a(a+2)^{2025}$ составное.