

## Деревья

**Определение 1.** Связный граф без циклов называется *деревом*.

**Определение 2.** Часть графа содержащая все его вершины и являющаяся деревом называется *остовным деревом*.

**Свойство 1.** В любом связном графе можно выделить остовное дерево.

**Свойство 2.** Пусть в дереве есть хотя бы две вершины. Тогда в нем есть хотя бы две висячие вершины.

**Свойство 3.** В дереве на  $n$  вершинах ровно  $n - 1$  ребро.

1. В дереве имеется 200 вершин степени 5, 100 вершин степени 3, а остальные — висячие. Сколько висячих вершин в этом дереве?
2. Между любыми двумя соседними клетками шахматной доски лежит спичка. Какое наименьшее число спичек можно убрать, чтобы ладья могла попасть за несколько ходов из любой клетки в любую другую, не перескакивая через спички?
3. Система станций метро устроена таким образом, что из каждой станции в каждую можно проехать. Докажите, что одну из станций можно закрыть так, что это свойство сохранится.
4. В стране ровно 100 городов и 199 двусторонних авиалиний. Из любого города можно добраться самолётами до любого другого. Докажите, что найдётся замкнутый маршрут, при закрытии всех авиалиний которого из любого города по-прежнему можно будет добраться до любого другого.
5. Может ли в каком-то связном графе быть в точности два различных остовных дерева?
6. В связном графе есть вершина степени  $n$ . Докажите, что в этом графе можно выделить  $n$  вершин так, чтобы при удалении любого набора из этих вершин, граф оставался связным.
7. В стране 2025 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от каждого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать во всех городах, совершив не более 4046 перелётов.
8. В графе на 101 вершине ребра покрасили в 3 цвета. Оказалось, что после выбрасывания ребер любого цвета остается связный граф. Какое минимальное количество ребер могло быть в изначальном графе?