Египетские дроби

Дроби вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число, назовём *египетскими*.

1. Докажите, что для каждого натурального $n > 1$ число
(а) $\frac{1}{n}$; **(б)** $\frac{2}{2n+1}$; **(в)** $\frac{3}{3n+2}$
можно представить в виде суммы двух различных египетских дробей.

2. Докажите, что число 1 можно представить в виде суммы
(а) трёх; **(б)** четырёх; **(в)** любого количества (больше двух)
различных египетских дробей.

3. Предъявите пять египетских дробей, образующих возрастающую арифметическую прогрессию.

4. Дано простое число $p > 3$.
Докажите, что есть ровно один способ разложить дробь **(а)** $\frac{1}{p}$; **(б)** $\frac{2}{p}$ в сумму двух различных египетских дробей.
(в) Докажите, $\frac{3}{p}$ можно представить в виде суммы двух египетских дробей тогда и только тогда, когда $p - 1$ не делится на 3.

5. Докажите, что каждое рациональное число $r \in (0, 1)$ можно представить в виде суммы нескольких различных египетских дробей.

6. **(а)** Решите в натуральных числах x, y, z уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

(б) Докажите, что при любом натуральном n у уравнения

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1$$

есть лишь конечное число решений в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
(в) Докажите, что если для натуральных чисел $x_1, \ldots, x_{10}$ выполнено

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{10}} = 1,$$

то каждое из этих чисел удовлетворяет неравенству $x_i \leqslant 10^{512}$.

7. Верно ли, что каждое рациональное число $r \in (0, 1)$ можно представить в виде суммы не более чем десяти египетских дробей?

8. Докажите, что любое рациональное число $r \geqslant 1$ тоже можно представить в виде суммы нескольких различных египетских дробей.