Сравнения по модулю

Определение Два целых числа a и b называются сравнимыми по модулю n, если их разность делится на n. Обозначение: $a \equiv b \pmod{n}$.

Свойства сравнений:

I Если $a \equiv b \pmod{n}$ и $b \equiv c \pmod{n}$, то $a \equiv c \pmod{n}$;

II Если $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$, то $a \pm b \equiv c \pm d \pmod{n}$;

III Если $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$, то $a \cdot c \equiv c \cdot d \pmod{n}$;

IV Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $a^k \equiv c^k \pmod{n}$ для всех натуральных k.

1. Сумма двух цифр a и b делится на 7. Докажите, что число $\overline{aba}$ также делится на 7.

2. На очень длинной доске записали число 2^n в десятичной записи. Потом вместо этого числа записали сумму его цифр. Затем снова вместо получившегося числа записали сумму его цифр. Докажите, что при каждом n этот процесс рано или поздно зациклится, и найдите этот цикл.

3. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не может быть полным квадратом.

4. Пусть A — произведение всех нечётных чисел от 1 до 2025, а B — произведение всех чётных чисел от 2 до 2026. Докажите, что $A + B$ делится на 2027.

5. На какое количество нулей может оканчиваться число $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$?

6. Андрей и Виктор играют в следующую игру. Изначально есть n кучек, в каждой из которых лежит некоторое количество камней. На каждом ходе Андрей кладёт один камень в одну из кучек, а Виктор — $n - 1$ камень, но как-то распределяет их между кучками. Ходы делаются по очереди. Докажите, что Виктор может играть так, что после одного из ходов количество камней во всех кучках будет делиться на некоторое отличное от 1 натуральное число.

7. Назовём *характеристикой* числа n последнюю цифру числа $3n$. Петя записал на доску 225 натуральных чисел, не все из которых равны. Затем Вася записал на доску характеристику каждого из выписанных чисел. Оказалось, что Петя и Вася выписали на доску один и тот же набор чисел. Докажите, что произведение чисел на доске делится на 225.