

Разнообразные графы

1. В 7 классе некоторой школы учится не более 37 учеников, при этом каждый человек знает 3 мальчиков и 7 девочек из этого же класса. Сколько могло быть учеников в этом классе?
2. Каких графов на n пронумерованных вершинах больше: с двумя компонентами связности или с тремя?
3. Андрей пригласил на вечеринку 2345 своих знакомых. Оказалось, что в каком бы порядке друзья ни приходили на праздник, каждый новый пришедший будет знать не менее четверти из уже присутствующих (включая Андрея). Докажите, что один из гостей вечеринки знаком со всеми остальными гостями, за исключением не более двух.
4. В стране 2026 городов.
(а) Первое правительство проложило автомобильные дороги так, что от каждого города шло не менее 1012 автомобильных дорог до других городов, а от столицы — 1013. Докажите, что от каждого города можно добраться до любого другого по автомобильным дорогам.
(б) Второе правительство проложило железные дороги так, что от каждого города шло не менее 1013 железных дорог до других городов. Страшное землетрясение уничтожило 1012 железных дорог. Докажите, что от каждого города можно добраться до любого другого по железным дорогам.
(в) Третье правительство закрыло одну работающую дорогу (не ясно, железную или автомобильную), чтобы создать видимость работы. Теперь по дорогам такого же типа, как и закрытая, нельзя добраться из каждого города в каждый. Покажите все возможные варианты расположения соответствующего типа дорог в каждом случае.
5. В каждой из трех школ учится по 300 человек. Любой ученик имеет в сумме 301 знакомого из двух других школ. Докажите, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы выбранные ученики были знакомы между собой.
6. На математическом кружке у любых двух школьников ровно пять общих знакомых. Докажите, что общее число знакомств кратно трём.