

По следам Уральского турнира

1. Найдите все такие пары простых чисел p и q , для которых остаток от деления p^2 на q равен неполному частному.
2. Саша посчитал, сколькими способами можно выбрать несколько (хотя бы одно) различных натуральных чисел, меньших миллиона, таким образом, чтобы как произведение, так и сумма выбранных чисел были чётны. На какую цифру оканчивается результат?
3. Найдите все такие натуральные числа a, b, c , что $ab - 1$ делится на $bc + 1$ и $bc - 1$ делится на $ac + 1$.
4. На олимпиаду по 11 различным предметам приехала делегация. Из этой делегации по каждому предмету была выставлена команда из 5 учеников. Оказалось, что для любых двух разных предметов есть ученик, участвующий в олимпиадах по обоим этим предметам. Докажите, что есть ученик, участвующий в олимпиадах хотя бы по 4 разным предметам.
5. В некоторой клетке доски 200×200 лежит монета решкой вверх. Раз в минуту монету можно либо передвинуть ходом слона и при этом перевернуть (вместо решки станет орлом, вместо орла — решкой), либо передвинуть ходом коня и не переворачивать. Через некоторое время монета побывала в каждой клетке ровно два раза. Докажите, что количество клеток, в которых монета была и орлом, и решкой, чётно.
6. Дано натуральное число k . В стране 2025 городов. Некоторые пары городов (но не все!) соединены двусторонними авиалиниями. Оказалось, что для любых двух городов, между которыми нет прямого авиасообщения, суммарное количество исходящих из них авиалиний равно k . Чему может быть равно k ?
7. Натуральное число N имеет ровно 2025 различных простых делителей. Все его делители выписали в строчку в порядке возрастания

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = N.$$

Могло ли оказаться, что число

$$d_2/d_1 + d_3/d_2 + \dots + d_k/d_{k-1}$$

— целое?