

Алгебраические преобразования

1. Вещественные числа a, b, c таковы, что $a^2 + 5b^2 + 4c^2 = 4ab + 4bc$. Докажите, что $a = 2b = 4c$.
2. Докажите тождество

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2(a_1 + a_2)} + \frac{a_2}{a_3(a_2 + a_3)} + \dots + \frac{a_n}{a_1(a_n + a_1)} = \\ = \frac{a_2}{a_1(a_1 + a_2)} + \frac{a_3}{a_2(a_2 + a_3)} + \dots + \frac{a_1}{a_n(a_n + a_1)}. \end{aligned}$$

3. Вещественные числа a, b, c удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}.$$

Докажите, что сумма каких-то двух из них равна нулю.

4. Вещественные числа a, b, c таковы, что $ab + a + b = 2$ и $ac + a + c = 8$. Чему может быть равно значение числа

$$\frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{b+1}?$$

5. Докажите, что для произвольных a, b , равенство

$$\frac{a(b-c)}{b+c} + \frac{b(c-a)}{c+a} + \frac{c(a-b)}{a+b} = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c} + \frac{b^2(c-a)}{c+a} + \frac{c^2(a-b)}{a+b} = 0.$$

6. Пусть a, b, c — ненулевые вещественные числа, такие что

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = 1.$$

Докажите, что две из этих дробей равны 1.