

Отрезки на прямой

1. На прямой выбрано несколько отрезков так, что любые два из них имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.
2. (а) На плоскости расположено несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. У любых двух прямоугольников есть общая точка. Докажите, что тогда у всех прямоугольников есть общая точка.
(б) А если стороны не обязательно параллельны осям координат?
3. (а) На прямой дано $2n + 1$ отрезков. Известно, что каждый пересекается не менее, чем с n из оставшихся. Докажите, что найдется отрезок, который пересекается со всеми.
(б) На плоскости расположено $[4n/3]$ прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой прямоугольник пересекается хотя бы с n другими. Докажите, что есть прямоугольник, пересекающийся со всеми остальными прямоугольниками.
4. (а) На плоскости дано семейство единичных квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Оказалось, что среди них нельзя найти $k + 1$ попарно не пересекающихся. Докажите, что найдётся множество X из $2k - 1$ точек такое, что всякий квадрат данного семейства содержит хотя бы одну точку X .
(б) На плоскости дано семейство квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Оказалось, что среди них нельзя найти $k + 1$ попарно не пересекающихся. Докажите, что найдётся множество X из $4k - 3$ точек такое, что всякий квадрат данного семейства содержит хотя бы одну точку X .
5. На прямой расположено несколько отрезков. Известно, что каждая точка прямой покрыта не более чем k отрезками. Докажите, что отрезки можно разделить на k множеств так, чтобы в каждом множестве отрезки не пересекались.
6. Докажите, что если в конечном семействе отрезков на прямой из любых $n + 1$ отрезка какие-то два пересекаются, то найдётся множество X из n точек такое, что всякий отрезок данного семейства содержит хотя бы одну точку X .
7. На прямой дано семейство отрезков, покрашенных в $n + 1$ цвет. Известно, что среди любых $n + 1$ разноцветных отрезков найдутся два пересекающихся. Докажите, что для некоторого цвета найдётся множество X из n точек такое, что всякий отрезок данного цвета содержит хотя бы одну точку X .
(а) $n = 1$; (б) $n = 2$; (в) любое n .
8. На плоскости дано семейство прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, покрашенных в два цвета. Известно, что любые два разноцветных прямоугольника пересекаются. Докажите, что либо все прямоугольники одного из цветов имеют общую точку, либо для каждого цвета есть прямая, пересекающая все прямоугольники этого цвета.