

Как меняется сумма цифр

Обозначим через $S(n)$ сумму цифр натурального числа n .

1. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b выполнено
(а) равенство $S(a) + S(b) - 9p = S(a + b)$, где p — количество переносов при сложении a и b в столбик;
(б) неравенство $S(a \cdot b) \leq S(a) \cdot S(b)$.

2. Найдите наименьшее натуральное число n , для которого ни одно из чисел

$$S(n + 1), S(n + 2), S(n + 3), \dots, S(n + 13), S(n + 14)$$

не делится на 8.

3. Найдите все двузначные числа n , для которых квадрат суммы цифр числа n равен сумме цифр числа n^2 . Ответ должен быть выписан заранее!
4. Известно, что сумма цифр натурального числа n равна 100, а сумма цифр числа $5n$ равна 50. Докажите, что n чётно.
5. Докажите, что

$$S(1) - S(2) + S(3) - \dots - S(7^{100} - 1) + S(7^{100}) = \frac{7^{100} + 1}{2}.$$

6. Докажите, что найдутся три таких различных натуральных числа a, b, c , что выполнено

$$a + S(a) = b + S(b) = c + S(c).$$

7. Сумма цифр числа n равна 50. Какое наибольшее значение может принимать сумма цифр числа (а) n^2 ; (б) n^3 ?
8. Обозначим через $\vartheta(k)$ количество цифр $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ в числе k . Например, $\vartheta(2261630853) = 4$. Докажите неравенство

$$\frac{\vartheta(1)}{1} + \frac{\vartheta(2)}{2} + \frac{\vartheta(4)}{4} + \frac{\vartheta(8)}{8} + \frac{\vartheta(16)}{16} + \dots + \frac{\vartheta(2^n)}{2^n} < \frac{2}{9}.$$