

Разложение на простые множители

1. Числа от 1 до 12 разбиты на две группы. Оказалось, что произведение чисел в первой группе ровно в k раз больше, чем во второй группе, где k — натуральное число. Определите минимальное возможное значение k .

2. (а) Даны натуральные числа m и n . Докажите, что

$$\text{НОД}(m, n) \cdot \text{НОК}(m, n) = m \cdot n.$$

- (б) Даны натуральные числа a, b, c . Докажите, что

$$\text{НОД}(a, b, c) \cdot \text{НОК}(ab, bc, ca) = abc = \text{НОК}(a, b, c) \cdot \text{НОД}(ab, bc, ca).$$

3. Определите минимальное натуральное число, половина которого — точный квадрат, треть — точный куб, а пятая часть — точная пятая степень.
4. Сумма пяти делителей натурального числа N — простое число. Докажите, что произведение этих делителей не превосходит N^4 .
5. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\text{НОД}(a, b, c) = 1$ и

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Докажите, что abc — точный квадрат.

6. Андрей задумал 41 различное натуральное число, каждое из которых меньше 1000. Оказалось, что среди любых трёх из этих чисел найдутся два, дающих в произведении точный квадрат. Докажите, что среди задуманных Андреем чисел встречается точный квадрат.
7. Можно ли в произведении

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 97! \cdot 98! \cdot 99! \cdot 100!$$

вычеркнуть один из факториалов так, чтобы остался точный квадрат?

8. Известно, что клетчатый квадрат можно разрезать на n одинаковых фигурок из k клеток. Докажите, что его можно разрезать и на k одинаковых фигурок из n клеток.