Очный отбор 7 класса

Задача 1. Тройка (a, b, c) натуральных чисел называется *удивительной*, если выполнено равенство

$$ab + c = bc + a = ca + b$$

и при этом $1 \leqslant a, b, c \leqslant 1000$. Сколько существует удивительных троек? Две тройки, отличающиеся порядком элементов, считаются разными.

Задача 2. На выставке кошек встретились 20 собак. Каждая собака обнюхала 10 других собак. Две собаки начинают дружить тогда и только тогда, когда каждая из них обнюхала другую. Какое наименьшее количество дружб могло образоваться?

Задача 3. Пинки загадал натуральное число N, а его друг Брейн пытается его отгадать. Пинки последовательно называет сумму цифр числа $N + 1$, сумму цифр числа $N + 2$, сумму цифр числа $N + 3$ и так далее. Брейн может в любой момент остановить Пинки и назвать предполагаемое число. Верно ли, что какое бы число ни было загадано, Брейн гарантированно сможет его рано или поздно отгадать?

Задача 4. У Стива есть 1000 одинаковых цветных кубиков $1 \times 1 \times 1$. У каждого кубика одна пара противоположных граней красная, вторая пара — синяя, третья пара — зелёная. Стив собрал из кубиков большой куб $10 \times 10 \times 10$ так, что у любых двух соседних кубиков примыкающие друг к другу грани одного цвета. Докажите, что у куба $10 \times 10 \times 10$ найдётся грань, целиком покрашенная в один цвет.

Задача 5. На зачёте в аудитории собрались 30 школьников. Зачёт проходит так: учитель выбирает любого школьника в аудитории и задаёт вопрос: «Сколько из 30 школьников сегодня сдадут зачёт?». Школьник называет целое число от 0 до 30, учитель записывает его ответ и объявляет всем в аудитории его результат «сдал»/«не сдал», после чего школьник покидает аудиторию, а учитель спрашивает следующего школьника.

В конце зачёта, когда все школьники дали свои ответы, в аудиторию заходит комиссия. Если есть хотя бы один школьник с верным ответом и результатом «не сдал», то учитель отстраняется от работы, и результаты всех школьников превращаются в «сдал».

Докажите, что школьники могут договориться действовать так, чтобы все 30 школьников сдали зачёт.

Задача 6. Безумный учёный Кассиус Нуль написал на доске N различных натуральных чисел. Каждую секунду он выбирает на доске два числа x и y с условием $x > y$ и выписывает на доску число $x^2 - y^2$. Спустя некоторое время оказалось, что все натуральные числа от 1 до 1000 включительно присутствуют на доске. При каком наименьшем N такое возможно?