

Очный отбор 7 класса, решения

Задача 1. Тройка (a, b, c) натуральных чисел называется *удивительной*, если выполнено равенство

$$ab + c = bc + a = ca + b$$

и при этом $1 \leq a, b, c \leq 1000$. Сколько существует удивительных троек? Две тройки, отличающиеся порядком элементов, считаются разными.

Ответ: 3997.

Решение. Рассмотрим равенство $ab + c = bc + a$. Перенеся все слагаемые в левую часть и собрав подобные, получим:

$$a(b - 1) + c(1 - b) = 0;$$

$$(a - c)(b - 1) = 0.$$

Таким образом, либо $a = c$, либо $b = 1$. Аналогично, из равенства $ab + c = ca + b$ получаем, что либо $b = c$, либо $a = 1$.

Решения вида (n, n, n) , $(n, 1, 1)$, $(1, n, 1)$, $(1, 1, n)$ подходят, других решений из наблюдений выше нет. Имеем по 1000 решений каждого из четырёх типов, при этом решение $(1, 1, 1)$ встречается в каждом из типов. Итого $4 \cdot 1000 - 3 = 3997$ решений.

□

Задача 2. На выставке кошек встретились 20 собак. Каждая собака обнюхала 10 других собак. Две собаки начинают дружить тогда и только тогда, когда каждая из них обнюхала другую. Какое наименьшее количество дружб могло образоваться?

Ответ: 10.

Решение. Сначала докажем, что меньше 10 дружб образоваться не могло. Заметим, что количество всех обнюхиваний равно $20 \cdot 10$, а количество пар собак равно $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$. Тогда по принципу Дирихле как минимум $200 - 190 = 10$ обнюхиваний приходится на одни и те же пары собак, а значит собаки в этих парах дружат.

Теперь покажем, что 10 дружб могло быть. Для этого расставим все 20 собак по кругу, и пусть каждая собака обнюхает следующих 10 по часовой стрелке. В такой расстановке каждая собака будет дружить только с собакой напротив. □

Задача 3. Пинки загадал натуральное число N , а его друг Брейн пытается его отгадать. Пинки последовательно называет сумму цифр числа $N + 1$, сумму цифр числа $N + 2$, сумму цифр числа $N + 3$ и так далее. Брейн может в любой момент остановить Пинки и назвать предполагаемое число. Верно ли, что какое бы число ни было загадано, Брейн гарантированно сможет его рано или поздно отгадать?

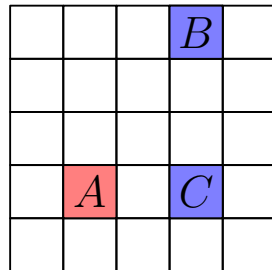
Ответ: Да, верно.

Решение. Пусть Брейн дождётся второго раза, когда Пинки назовёт число 1. Сумму цифр, равную 1, может иметь только число вида 10^k . При этом два соседних числа такого вида имеют разность $10^{k+1} - 10^k = 9 \cdot 10^k$. Это число Брейн знает (оно определяется количеством названных Пинки чисел между двумя единицами), а значит может восстановить k . Тогда изначально загаданное Пинки число равно $10^{k+1} -$ количество всех чисел, названных Пинки. $\square$

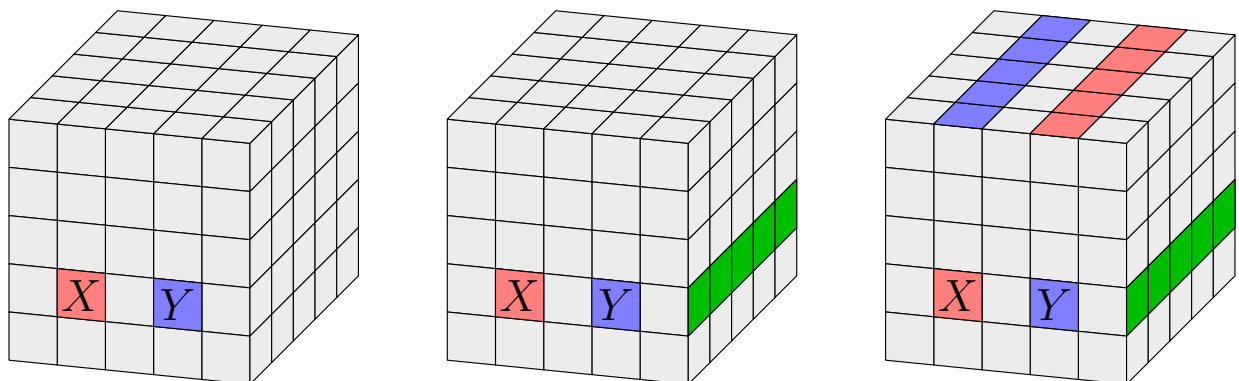
Задача 4. У Стива есть 1000 одинаковых цветных кубиков $1 \times 1 \times 1$. У каждого кубика одна пара противоположных граней красная, вторая пара — синяя, третья пара — зелёная. Стив собрал из кубиков большой куб $10 \times 10 \times 10$ так, что у любых двух соседних кубиков примыкающие друг к другу грани одного цвета. Докажите, что у куба $10 \times 10 \times 10$ найдётся грань, целиком покрашенная в один цвет.

Решение. Рассмотрим вертикальный столбик из 10 кубиков. Заметим, что все верхние и нижние грани всех этих 10 кубиков обладают одним цветом. Этот цвет будем далее кратко называть *цветом* столбика. Аналогичное верно для рядов из 10 кубиков двух других направлений. Ясно, что через каждый кубик $1 \times 1 \times 1$ проходят три ряда разных цветов.

Предположим противное: никакая грань не одноцветная. Рассмотрим переднюю грань. Докажем, что в ней есть две клетки разных цветов в одном ряду (горизонтальном или вертикальном).



Действительно: найдём в ней две клетки A и B разных цветов. Если они не лежат в одном ряду, то можно отметить клетку C пересечения горизонтали через A и вертикали через B . Одна из пар (A, C) , (B, C) — искомая пара клеток. Если клетки A и B лежат в одном ряду, то сама пара (A, B) подходит.



Обозначим найденные разноцветные клетки X и Y . Без ограничения общности можно считать, что они лежат в одной горизонтали и что они красного и синего цвета

соответственно. Рассмотрим ряды x и y через эти клетки от передней грани до задней. Эти ряды красного и синего цвета, и тогда любой ряд от правой грани до левой, пересекающий оба ряда x и y , обладает зелёным цветом.

Рассмотрим любой кубик в ряду x . Через него уже проходит красный ряд x и зелёный ряд от правой грани до левой. Следовательно, любой ряд от верхней грани до нижней, пересекающий ряд x по кубику, обладает синим цветом. Аналогично, любой вертикальный столбик, пересекающий ряд y — красного цвета.

Остаётся заметить, что теперь вообще любой ряд от правой грани до левой пересекает уже найденные ряды красного и синего цвета. Следовательно, все ряды от правой грани до левой — зелёные, и тогда правая и левая грани целиком зелёного цвета. Противоречие.

□

Задача 5. На зачёте в аудитории собрались 30 школьников. Зачёт проходит так: учитель выбирает любого школьника в аудитории и задаёт вопрос: «Сколько из 30 школьников сегодня сдадут зачёт?». Школьник называет целое число от 0 до 30, учитель записывает его ответ и объявляет всем в аудитории его результат «сдал»/«не сдал», после чего школьник покидает аудиторию, а учитель спрашивает следующего школьника.

В конце зачёта, когда все школьники дали свои ответы, в аудиторию заходит комиссия. Если есть хотя бы один школьник с верным ответом и результатом «не сдал», то учитель отстраняется от работы, и результаты всех школьников превращаются в «сдал».

Докажите, что школьники могут договориться действовать так, чтобы все 30 школьников сдали зачёт.

Решение. Пусть каждый школьник в момент, когда его спрашивают, будет называть число, равное сумме количества ещё не опрошенных школьников плюс количество уже выставленных отметок «сдал» к этому моменту. Докажем, что при такой стратегии все школьники гарантированно получат зачёт.

Если учитель вообще всех оценил на «сдал», то все школьники действительно получили зачёт. Допустим, не все ответы были оценены на «сдал». Рассмотрим последнего несдавшего. Все школьники после него сдали, а значит его предсказание сбылось, но сам он зачёт не получил. В этом случае учитель будет отстранён, и все получают зачёт. □

Задача 6. Безумный учёный Кассиус Нуль написал на доске N различных натуральных чисел. Каждую секунду он выбирает на доске два числа x и y с условием $x > y$ и выписывает на доску число $x^2 - y^2$. Спустя некоторое время оказалось, что все натуральные числа от 1 до 1000 включительно присутствуют на доске. При каком наименьшем N такое возможно?

Ответ: 252.

Решение. Покажем, что $N \geq 252$.

Сначала заметим, что никакое число вида $4k + 2$ не может быть представлено в виде $x^2 - y^2$. Действительно, числа x^2 и y^2 могут давать только остатки 0 и 1 при делении на 4, а стало быть, $x^2 - y^2$ не может давать остаток 2 при делении на 4. Значит, все числа такого вида должны быть на доске изначально.

Число 4 также нельзя представить в виде $x^2 - y^2$, не используя его само. Если $y \geq 2$, то $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \geq x + y > 4$. В случае $y = 1$ должно выполняться $x^2 - 1 = 4$ и $x^2 = 5$, что также не имеет решений в натуральных числах.

Итого, уже есть 251 число, которое обязательно должно быть на доске. Остаётся заметить, что все они делятся на 2, поэтому нечётные числа, используя только их, получить не получится. Значит, чисел хотя бы 252.

Покажем, что $N = 252$ хватает. Выпишем на доску 1, 4 и все числа от 1 до 1000 вида $4k + 2$. Будем выписывать числа по следующему алгоритму.

Рассмотрим наименьшее число от 3 до 1000, которого ещё нет на доске.

1. Если оно вида $2k + 1$, то можем получить его как $(k + 1)^2 - k^2 = 2k + 1$.
2. Если оно вида $4k$, то можем получить его как $(k + 1)^2 - (k - 1)^2 = 4k$.

Таким образом, все числа от 1 до 1000 рано или поздно попадут на доску. □