Узлы и зацепления

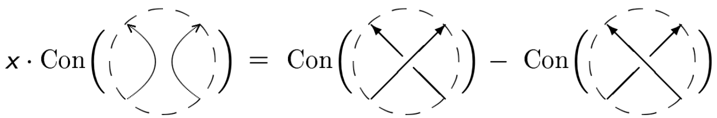
1. Приведите пример зацепления, в котором любые два узла можно распутать (то есть перевести движениями Рейденмейстера диаграмму в такую, в которой эти два узла окажутся по двум разным полуплоскостям относительно какой-то прямой), если убрать остальные, а если ничего не убирать, то ничего распутать нельзя.

Определение. Правильная 3-раскраска дуг диаграммы узла (зацепления) — такая раскраска дуг диаграммы узла (зацепления), что для каждого перекрестка диаграммы верно, что все три входящие в него куска дуг либо попарно разных цветов, либо все одного цвета.

2. Докажите, что количество правильных 3-раскрасок дуг диаграмм узлов (зацеплений) сохраняется при движениях Рейденмейстера (и, следовательно, является инвариантом узлов).

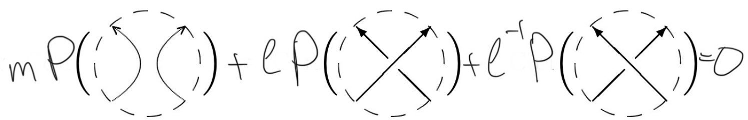
3. * Докажите, что количество правильных 3-раскрасок дуг диаграмм узла или зацепления является натуральной степенью тройки.

Определение. Многочлен Конвея $\mathrm{Con}(L)$ зацепления L это многочлен от одной переменной t, определяемый скейн-соотношением



и начальным условием $\mathrm{Con}(\text{тривиальный узел}) = 1$.

Определение. Многочлен HOMFLY $P(L)$ зацепления L это многочлен от двух переменных m, l, определяемый скейн-соотношением



и начальным условием $P(\text{тривиальный узел}) = 1$.

4. Пойдем по каждой из окружности зацепления в порядке обхода этой окружности и для каждого перекрестка на диаграмме запишем, мы сначала прошли его по верхней части или по нижней. Те, которые прошли по верхней, назовем хорошими, которые прошли по нижней — плохими.

Докажите, что многочлен Конвея корректно определен через скейн-соотношения, а именно:

(а) Докажите, что диаграмма, состоящая только из хороших перекрестков, является диаграммой тривиального зацепления. И заодно найдите значения многочлена Конвея на всех тривиальных зацеплениях (в том числе состоящих из нескольких окружностей).

(б) Докажите, что с помощью скейн-соотношений можно вычислить значение многочлена Конвея на любом зацеплении.

(в) Докажите, что значение многочлена Конвея на зацеплении, вычисленное через скейн-соотношения, вычисляется через них единственным образом.

5. Вычислите значение многочлена Конвея на узле-трилистнике.

6. Докажите, что у многочлена Конвея для **узла** ненулевыми могут быть только четные коэффициенты.

7. * Приведите нетривиальный пример **узла**, диаграмма которого не допускает нетривиальных 3-раскрасок (и докажите, что он действительно нетривиален!).

8. Докажите, что правый и левый трилистники это разные узлы (то есть один не переводится движениями Рейденмейстера в другой).

9. Нарисуйте диаграммы 5 различных узлов, соответствующих хордовым диаграммам с 3 хордами.

Определение. *Графом пересечения* $\Gamma(C)$ *хордовой диаграммы* C называется простой граф, т. е. граф без петель и кратных рёбер, множество вершин которого взаимнооднозначно соответствует множеству хорд диаграммы C, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им хорды пересекаются.

10. Приведите пример графа, который не является графом пересечений никакой хордовой диаграммы.

Определение. *Паросочетание* размера k в графе G — набор из k попарно несмежных ребер графа G.

Например, для изображенного на рисунке графа красные рёбра образуют паросочетание размера 3.

Определение. *Многочлен паросочетаний* $M_G(t)$ графа G — производящая функция для числа паросочетаний в графе G:

$$M_G(t) = \sum_{k\geq 0} m_k(G)t^k,$$

где $m_k(G)$ — число паросочетаний размера k в графе G.

11. Докажите, что многочлен паросочетанй является 4-инвариантом графов.

12. Докажите, что количество простых циклов фиксированной длины $k \geq 4$ по модулю 2 является 4-инвариантом графов.