Матбой (Команда 3 VS Команда 4)

1. Существуют ли ограниченные функции u, v, w, сопоставляющие каждому целому числу вещественное число так, что для любых натуральных и выражение $u(x) + v(y) + w(x-y)$ принимает значение 1, если $\{\sqrt{2}x\} > \{\sqrt{2}y\}$, и принимает значение 0, если $\{\sqrt{2}x\} < \{\sqrt{2}y\}$?

2. Пусть A — некоторое бесконечное подмножество натуральных чисел. Число n таково, что для любого $a \in A$

$$a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1 \mid a^{n!} + a^{(n-1)!} + \ldots + a^{1!} + 1.$$

Чему могло быть равно n?

3. Клетки бесконечной вправо клетчатой полоски последовательно занумерованы числами $0, 1, 2, \ldots$. В некоторых клетках лежат камни. Если на i-ой клетке ($i > 0$) лежит ровно i камней, то разрешается снять их с нее и разложить по одному на клетки с номерами $i-1, i-2, \ldots, 0$. Леша разложил 2006! камней по клеткам с положительными номерами так, чтобы можно было собрать их в нуле, сделав несколько операций. Каким может быть минимальный номер клетки, занятой камнем?

4. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром в точке O, а его высоты пересекаются в точке H. На продолжении BC за точку B отмечена точка X такая что $HX \perp AO$. Перпендикуляр, восставленный в точке X к прямой BC вместе с прямыми AB и AC ограничивает треугольник Δ. Точка S — центр окружности, описанной около треугольника Δ. Докажите, что прямая SX касается окружности ω.

5. Дано натуральное число n. Петя и Вася по очереди называют действительные числа. Сначала Петя называет число a_1, затем Вася называет число a_2, затем снова Петя число a_3, $\ldots$, в конце Вася называет число a_{2n}. Какое наибольшее количество общих различных действительных корней у многочленов $x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \ldots + a_{2n-1} x + a_{2n}$ и $x^{2n} + a_2 x^{2n-1} + a_3 x^{2n-2} + \ldots + a_{2n} x + a_1$ может гарантировать Вася независимо от действий Пети?

6. Два друга, играющие за эльфа и гнома, победили босса подземелья. В награду они получили сундук, в котором лежали 100 одинаковых жетонов и 100 мешочков с золотыми монетами: в одном 1 монета, во втором — 2, в третьем — 3, $\ldots$, в сотом — 100 (про каждый мешочек известно, сколько в нём монет). По правилам игры награда делится следующим образом. На очередном ходу эльф выбирает любой мешочек из сундука, а гном может либо отдать этот мешочек эльфу и забрать себе один жетон из сундука, либо отдать один из своих жетонов эльфу и забрать мешочек себе (изначально у эльфа и у гнома не было ни монет, ни жетонов). Какое наибольшее количество золотых монет может гарантированно получить гном?

7. Треугольник ABC с углом $B = \angle 60^\circ$ вписан в окружность ω и описан около окружности с центром I. Вневписанные окружности касаются сторон AB и BC в точках L и K соответственно. Прямые AK и CL вторично пересекают ω в точках P и Q соответственно. Пусть O_A и O_C - центры описанных окружностей треугольников CKP и ALQ соответственно. Точка M - середина BI. Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников $O_A M O_C$ и ABC равны.

8. На пристань прибыли 9 грузовиков. Каждый из них привёз не более 10 тонн грузов, причём известно, что масса каждого отдельного груза не превосходит 1 тонны. На пристани имеется 10 барж грузоподъёмностью k тонн каждая. При каком наименьшем k весь доставленный груз гарантированно можно увезти на баржах?

9. A — одна из вершин графа, все вершины которого имеют степень 1000. Его вершины можно раскрасить в 1000 цветов правильным образом. Докажите, что эту раскраску можно произвести так, чтобы соседи вершины A были окрашены хотя бы в 500 различных цветов.

10. Таблица 101×101 покрашена в несколько цветов (каждая клетка — ровно в один цвет) так, что в любом квадрате 2×2 присутствуют клетки не более чем трёх различных цветов. Какое наибольшее количество цветов могло быть использовано?