Матбой (Команда 1 VS Команда 2)

1. Внутри треугольника ABC отмечена точка P. Через P проведены перпендикуляры к сторонам треугольника. Рассмотрим три треугольника, образованных парами таких перпендикуляров и не соответствующей ни одному из них стороны исходного треугольника. Три описанные окружности таких треугольников попарно пересекаются в трёх отличных от P точках. Докажите, что окружность, заданная по этим трём точкам, касается (ABC).

2. Даны вещественные числа x, y и z, не меньшие единицы. Докажите неравенство

$$\frac{x^3-y+z}{z^3-z+3xy}+\frac{y^3-z+x}{x^3-x+3yz}+\frac{z^3-x+y}{y^3-y+3zx}\geq 1$$

3. A — одна из вершин графа, все вершины которого имеют степень 1000. Его вершины можно раскрасить в 1000 цветов правильным образом. Докажите, что эту раскраску можно произвести так, чтобы соседи вершины A были окрашены хотя бы в 500 различных цветов.

4. Дано простое число p. Двое играют в игру: сначала первый называет число $a_1 \in \mathbb{N}$, потом второй называет число $a_2 \in \mathbb{N}$, потом они считают число натуральных делителей числа $a_1^{a_2} - a_2^{a_1}$ (считаем, что у нуля ровно 1 делитель). Если посчитанное количество делится на p — выигрывает второй. Кто выигрывает?

5. На пристань прибыли 9 грузовиков. Каждый из них привёз не более 10 тонн грузов, причём известно, что масса каждого отдельного груза не превосходит 1 тонны. На пристани имеется 10 барж грузоподъёмностью k тонн каждая. При каком наименьшем k весь доставленный груз гарантированно можно увезти на баржах?

6. Пусть A — некоторое бесконечное подмножество натуральных чисел. Число n таково, что для любого $a \in A$

$$a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1 \mid a^{n!} + a^{(n-1)!} + \ldots + a^{1!} + 1.$$

Чему могло быть равно n?

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF, пересекающиеся в точке H. Пусть O — центр описанной окружности ω. Касательные к окружности ω, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке T. Точки K и L симметричны точке O относительно AB и AC соответственно. Окружности (DFK) и (DEL) пересекаются в точке P, отличной от D. Докажите, что точки P, D, T лежат на одной прямой.

8. Таблица 101×101 покрашена в несколько цветов (каждая клетка — ровно в один цвет) так, что в любом квадрате 2×2 присутствуют клетки не более чем трёх различных цветов. Какое наибольшее количество цветов могло быть использовано?

9. Для многочлена с вещественными коэффициентами $P(x)$ определим $P_n(x) = \underbrace{P(P(\ldots P(x)\ldots))}_{n\ \text{раз}}$. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $P_n = Q_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $P_2 = Q_2$.

10. Сикс Севеновски нарисовал сто прямых общего положения на плоскости и утверждает, что у всех выпуклых четырёхугольников, которые получились, отрезки, соединяющие середины диагоналей, попарно параллельны! Могло ли так быть?