

Задачи с мерой

- (Теорема Пуанкаре о возвращении.) На плоскости нарисован квадрат \blacksquare размера 1×1 . Пусть $f: \blacksquare \rightarrow \blacksquare$ — это биективная функция, сохраняющая площади любых подмножеств квадрата \blacksquare . Пусть $A \subset \blacksquare$ — фигура положительной площади.

(а) Докажите, что существует точка $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$, что $f(\underbrace{f(\dots f(a))}_n) \in A$.

(б) Докажите, что площадь множества точек a из пункта (а) равна площади множества A . *Иными словами почти все точки множества A (за исключением множества площади 0) возвращаются в множество A .*
- На окружности длины 1 отмечена дуга S длины s . Кузнечик прыгает по окружности, каждый ход перемещаясь на α по часовой стрелке ($\alpha \notin \mathbb{Q}$). Сколько в среднем прыжков потребуется кузнечику, стартующему из случайной точки дуги S , чтобы впервые вернуться в дугу S ?
- В пространстве дан выпуклый многогранник, сумма телесных углов которого меньше чем 2π . Докажите, что в этом многограннике есть *гаммильтонов цикл*: то есть что муравей может проползти по некоторым рёбрам многогранника так, чтобы побывать в каждой вершине ровно по разу и вернуться в исходную точку. (*Мерой* телесного угла называется площадь куска, высекаемого этим углом от единичной сферы с центром в вершине угла. Площадь всей единичной сферы если что равна 4π .)
- На координатной плоскости в первой четверти проведены 100 непересекающихся единичных отрезков, параллельных координатным осям. Эти отрезки — зеркала (с обеих сторон), они отражают свет по правилу «угол падения равен углу отражения». (При попадании в край зеркала луч света не изменяет своего направления.) Из точки, лежащей в единичном круге с центром в начале координат, выпускают луч света в направлении биссектрисы первого координатного угла. Докажите, что эту начальную точку можно выбрать так, чтобы луч отразился от зеркал не более 150 раз.
- В пироге радиуса R запекли монетку радиуса $r < R$. За какое минимальное число прямолинейных разрезов можно гарантированно задеть ножом монетку? Если разрез касается монетки, то она считается задетой.
- Дан выпуклый многоугольник с рационально кратными π углами. Докажите, что в нём существует периодическая бильярдная траектория. *Спойлер: попробуйте использовать теорему Пуанкаре о возвращении.*

7. Дан шоколадный сверху торт и вещественные числа α и β , оба больше 0, но меньше 2π . За операцию можно вырезать кусочек с углом α в фиксированном месте, перевернуть его и вставить обратно, затем повернуть торт на β . Докажите, что после нескольких операций весь шоколад на тортике вновь окажется сверху.