

## Конечные проективные плоскости

**Определение 1.** *Конечной проективной плоскостью* будем называть некоторое конечное множество ("точки") в котором выбраны некоторые подмножества ("прямые") так, что выполняются следующие свойства:

- через любые две точки проходит ровно одна прямая;
  - любые две прямые пересекаются ровно в одной точке;
  - имеются четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.
1. (а) Докажите, что на каждой прямой в конечной проективной плоскости есть хотя бы три точки.  
(б) Докажите, что для каждой проективной плоскости найдётся такое число  $n$ , что:
    - на каждой прямой лежит  $n + 1$  точка;
    - через каждую точку проходит  $n + 1$  прямая;
    - всего на плоскости имеется  $n^2 + n + 1$  точка и столько же прямых.

**Определение 2.** Число  $n$  называется *порядком* конечной проективной плоскости.

**Утверждение.** Если существует конечное поле из  $n$  элементов, то существует конечная проективная плоскость порядка  $n$ . То есть в частности для  $n = p$ , где  $p$  — простое, такие плоскости существуют (а на самом деле вообще для  $n = p^k$ ).

2. Пусть в правильном  $(n^2 + n + 1)$ -угольнике нашлись такие  $k$  точек, что среди попарных расстояний между ними встречаются всевозможные расстояния между точками многоугольника, причём ровно по разу. Докажите, что тогда существует конечная проективная плоскость порядка  $n$ .
3. (а) Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 13 закрытых пустых шкатулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкатулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника — открыть обе шкатулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался. (б) А если шкатулок 21, но можно открыть 5?
4. Какое наибольшее количество клеток в квадрате  $57 \times 57$  можно закрасить так, чтобы никакие 4 не были вершинами прямоугольника?

**Определение 4.** *Латинским квадратом* порядка  $n$  будем называть квадрат  $n \times n$ , заполненный числами от 1 до  $n$  так, что в каждой строчке и в каждом столбце написана некоторая перестановка чисел от 1 до  $n$ .

**Определение 5.** Представим, что мы наложили друг на друга два латинских квадрата и теперь у нас получился квадрат  $n \times n$ , в каждой клетке которого стоит упорядоченная пара чисел (первое — из первого квадрата, второе — из второго). Если получившиеся  $n^2$  пар вышли различными, то мы будем называть исходные два квадрата *ортогональными*.

5. Будем называть множество латинских квадратов размера  $n$  *кайфовым*, если они попарно ортогональны.  
(а) Докажите, что в кайфовом множестве не более  $n - 1$  элемента.  
(б) Докажите, что кайфовое множество из  $n - 1$  элемента существует тогда и только тогда, когда существует конечная проективная плоскость порядка  $n$ .
6. Из колоды вынули 7 карт, показали всем, перетасовали и раздали двум игрокам по 3 карты, а оставшуюся карту отдали зрителю. Игроки могут по очереди сообщать вслух открытым текстом любую информацию о своих картах. Могут ли они сообщить друг другу свои карты так, чтобы при этом зритель не смог вычислить местонахождение ни одной из карт, которых он не видит?
7. Два шерифа соседних городов составили список из 7 подозреваемых в качестве серийного убийцы. Потом каждый из них, проведя оперативно-разыскные действия, сократил список подозреваемых до двух человек. Эти списки различны, т. е. пересекаются только по одному подозреваемому, поэтому шерифы, обменявшись информацией, могут совместно арестовать убийцу (а в одиночку они этого сделать не могут). Но если эта информация будет перехвачена и станет известна жителям, то они поймут, кто убийца, и линчуют его, не дожидаясь ареста (список из семи подозреваемых им известен). Как шерифам обменяться информацией, чтобы арестовать убийцу?
8. Трансильванская лотерея — это лотерея, в которой игрок выбирает три числа между 1 и 14, а три числа выбираются случайно. Игрок выигрывает, если два из его чисел совпадают с двумя случайно выбранными. Докажите, что в эту лотерею можно гарантированно выиграть, если правильно выбрать 14 билетов.
9. Дано натуральное число  $k$ . В городе несколько детей, они ходят в несколько кружков. Известно, что в каждый кружок ходит не более  $3k$  детей, любой ребёнок ходит ровно в три кружка, и для любых двух детей есть кружок, в которой оба они ходят. Какое наибольшее количество детей может быть в городе?