Разминаемся

1. Пусть X — некоторая фиксированная точка на стороне AC треугольника ABC (X отлична от A и C). Произвольная окружность, проходящая через X и B, пересекает отрезок AC и описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q, отличных от X и B. Докажите, что все возможные прямые PQ проходят через одну точку.

2. В первый день 2^n школьников играли в пинг-понг «навылет»: сначала сыграли двое, затем победитель сыграл с третьим, победитель этой пары — с четвёртым и т.д., пока не сыграл последний школьник (ничьих в пинг-понге не бывает). Во второй день те же школьники разыграли кубок: сначала произвольно разбились на пары и сыграли в парах, проигравшие выбыли, а победители снова произвольно разбились на пары и сыграли в парах, и т.д. Оказалось, что наборы игравших пар в первый и во второй день были одни и те же (возможно, победители были другие). Найдите наибольшее возможное значение n.

3. Многочлен третьей степени имеет три различных корня строго между 0 и 1. Учитель сообщил ученикам два из этих корней. Ещё он сообщил все четыре коэффициента многочлена, но не указал, в каком порядке эти коэффициенты идут. Обязательно ли можно восстановить третий корень?

4. На стороне AC треугольника ABC взяли такую точку D, что угол BDC равен углу ABC. Чему равно наименьшее возможное расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, если $BC = 1$?

5. Дано натуральное число $n > 1$. Что больше: количество способов разрезать клетчатый квадрат $3n \times 3n$ на клетчатые прямоугольники 1×3 или количество способов разрезать клетчатый квадрат $2n \times 2n$ на клетчатые прямоугольники 1×2?

Уже было. У хозяйки есть кусок мяса, которым она хочет накормить трёх котиков. Раз в несколько секунд хозяйка отрезает кусочек мяса и скармливает его одному из котиков на свой выбор, причём каждый кусочек должен составлять одну и ту же долю куска, от которого его отрезают. Через некоторое время хозяйка убирает остаток мяса в холодильник. Может ли она скормить котикам поровну мяса?

Уже было. В выпуклом шестиугольнике равны противоположные стороны и $\angle A - \angle D = \angle C - \angle F = \angle E - \angle B$. Докажите, что его главные диагонали пересекаются в одной точке.

Уже было. Числа $a_1, a_2, \dots a_p$ и $b_1, b_2, \dots, b_p$ таковы, что среди чисел вида $a_i + b_j$ каждый остаток по модулю p встречается ровно p раз (разумеется p — простое число). Докажите, что либо в наборе a_i, либо в наборе b_i встречаются всевозможные остатки по модулю p.