

## Какая-то комбинаторика

1. На столе лежит палочка длиной 10 см. Петя ломает её на две части и кладёт обе получившиеся палочки на стол. С одной из лежащих на столе палочек Вася проделывает ту же операцию, потом то же делает Петя и т.д., по очереди. Петя хочет, чтобы после 18 разломов все получившиеся палочки были короче 1 см. Вася хочет помешать Пете. Кто из них имеет возможность добиться своей цели независимо от действий соперника?
2. У повара в подчинении десять поварят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного или нескольких поварят на дежурство, а каждый из дежурных поварят уносит с работы по одному пирожному каждому своему недежурящему другу. В конце дня повар узнаёт количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней понять, кто из поварят дружит между собой, а кто нет?
3. Известно, что некоторые сенаторы между собой в ссоре. Проверено, однако, что как бы мы не посадили их всех или любую группу (3 или более) из них по кругу, найдется пара соседей не в ссоре. Весь сенат усадили за круглый стол. Если два соседа не в ссоре, они могут поменяться местами. Докажите, что сенаторы могут расположиться в любом круговом порядке (порядки, полученные поворотом, не различаются).
4. За каждым из двух круглых столиков сидит по  $n$  гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столику слева и справа. Добрый волшебник хочет посадить гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить  $2n$  пар гномов (гномы в паре могут быть как с одного столика, так и с разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой  $n$  пар гномов из этих  $2n$  пар. При каких  $n$  добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник?
5. У хозяйки есть кусок мяса, которым она хочет накормить трёх котиков. Раз в несколько секунд хозяйка отрезает кусочек мяса и скармливает его одному из котиков на свой выбор, причём каждый кусочек должен составлять одну и ту же долю куска, от которого его отрезают. Через некоторое время хозяйка убирает остаток мяса в холодильник. Может ли она скормить котикам поровну мяса?
6. В Чикаго орудует 36 преступных банд, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причём любые два гангстера состоят в разных наборах банд. Известно, что ни один гангстер не состоит в двух бандах, враждующих между собой. Кроме того, оказалось, что каждая банда, в которой не состоит некоторый гангстер, враждует с какой-то бандой, в которой данный гангстер состоит. Какое наибольшее количество гангстеров может быть в Чикаго?