

Не баян, а классика

1. У Вани есть проволочные квадрат $ABCD$ с проведённой диагональю AC и равносторонний треугольник XYZ с такой же высотой. Он совместил их таким образом, что прямые XY и AD совпадают, а точка Z лежит на отрезке BC . Пусть проволочки XZ и AC пересеклись в точке P , а YZ и CD - в точке Q . Чему может быть равен угол между прямой PQ и общим основанием квадрата и треугольника?
2. Пусть точка N - середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC , а I - центр его вписанной окружности, M - середина стороны BC . Точка M' симметрична точке M относительно прямой AI . Докажите, что окружность NIM' проходит через центр вневписанной окружности треугольника ABC .
3. В остроугольном треугольнике ABC проведена медиана AM . На луче AB отмечена точка D такая, что $\angle ADM = \angle ACM$, а на луче AC отмечена такая точка E , что $\angle AEM = \angle ABM$. Описанные окружности треугольников ACD и ABE повторно пересекаются в точке S . Докажите, что прямые AS и BC параллельны.
4. Пусть $ABCD$ - описанный четырехугольник. На прямых AD и BC отметили точки X и Y соответственно так, что прямая CX параллельна AB , прямая AU параллельна CD . Докажите, что $AUCX$ - описанный.
5. Вершины A и C треугольника ABC отразили относительно прямых BC и AB и получили точки A' и C' соответственно. Затем прямую, проходящую по основаниям высот, опущенных из A и C , пересекли с окружностью ABC - получились точки P и Q . Докажите, что четырёхугольник $A'C'PQ$ вписан в окружность.
6. Точки X и Y - проекции вершины B на касательную к описанной окружности треугольника ABC в точке A и на прямую AC . H - ортоцентр треугольника BXY . CH пересекает AX в точке D . Докажите, что BA - биссектриса угла DVC .
7. Пусть точка M - середина стороны BC треугольника ABC , а точка D - точка касания вписанной окружности с этой стороной. Биссектриса угла A треугольника пересекает окружность с центром в точке M , проходящую через D в точках P и Q . Докажите, что $\angle PMQ + \angle BAC = 180^\circ$.
8. В треугольнике ABC точки O и H - центр описанной окружности и ортоцентр. Окружность описанная около треугольника AHC , повторно пересекает прямую AB в точке M . Окружность, описанная около треугольника AHB , повторно пересекает AC в точке N . Докажите, что центр описанной окружности треугольника MNH лежит на прямой OH .
9. Через центр вписанной окружности I треугольника ABC провели прямую, перпендикулярную прямой OI . Пусть она пересекает прямую AC в точке P , а биссектрису внешнего угла B в точке Q . Какие значения может принимать отношение $PI : QI$?