Немного задач если не хотите решать старые задачи

1. Существуют ли натуральные числа a, b, c такие, что все три числа

$$a^2 + b + c, a + b^2 + c, a + b + c^2$$

являются точными квадратами?

2. Дано натуральное число c и последовательность простых чисел p_1, p_2, $\ldots$, p_n, $\ldots$ такая, что $p_i + c$ делится на p_{i+1}. Докажите, что последовательность $\{p_n\}$ ограничена.

3. Дана последовательность a_n:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$$

(одна единица, две двойки, три тройки и т. д.) и еще одна последовательность b_n такая, что $a_{b_n} = b_{a_n}$ для всех натуральных n. Известно, что $b_k = 1$ при некотором $k > 100$. Докажите, что $b_m = 1$ при всех $m > k$.

4. Натуральное число n называется хорошим, если оно представимо в виде суммы различных делителей n, среди которых есть единица. Докажите, что для любого натурального k существует хорошее число, кратное k.

5. Числа $a_1, a_2, \ldots a_p$ и $b_1, b_2, \ldots, b_p$ таковы, что среди чисел вида $a_i + b_j$ каждый остаток по модулю p встречается ровно p раз (разумеется p — простое число). Докажите, что либо в наборе a_i, либо в наборе b_i встречаются всевозможные остатки по модулю p.