# Разнобой к ММО.

1. Многочлен $P(x)$ степени $n > 1$ принимает целые значения в точках $0, 1, 4, \ldots, n^2$. Приведите пример такого $P(x)$, у которого не все коэффициенты целые.

2. Существуют ли 100 рациональных чисел таких, что произведение любых двух не является целым числом, а произведение любых трёх является целым?

3. Тетраминошки бывают 5 различных видов — $\mathbb{O}, \mathbb{I}, \mathbb{T}, \mathbb{L}, \mathbb{Z}$. Назовем пятизначный код $abcde$ «хорошим», если существует такое разбиение квадрата $6 \times 6$ на тетраминошки, что $\mathbb{O}$ использована $a$ раз, $\mathbb{I}$ — $b$ раз, $\mathbb{T}$ — $c$ раз, $\mathbb{L}$ — $d$ раз и $\mathbb{Z}$ — $e$ раз.

   **(а)** Является ли «хорошим» код 16200?

   **(б)** Докажите, что количество «хороших» кодов не превосходит 325.

   **(в)** Докажите, что количество «хороших» кодов не превосходит 285.

4. В треугольнике $ABC$ $N$ — середина дуги $ABC$ описанной окружности треугольника, $NP$ и $NT$ — касательные к вписанной окружности. Прямые $BP$ и $BT$ пересекают второй раз описанную окружность треугольника в точках $P_1$ и $T_1$ соответственно. Докажите, что $PP_1 = TT_1$.

5. Существуют ли два многочлена с целыми коэффициентами такие, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2026, но у произведения этих двух многочленов модули всех коэффициентов не превосходят 1?

6. Действительные числа $a, b, c, d$ по модулю большие единицы, удовлетворяют соотношению
$$abc + bcd + cda + dab + a + b + c + d = 0$$
Докажите, что
$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0$$