

Готовимся к ММО

1. Обозначим через s функцию, считающую сумму цифр. Каких k -значных чисел n больше: для которых $s(n) > s(2n)$ или для которых $s(2n) > s(n)$?
2. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак \pm , а также обычные знаки $+$, $-$, \times и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака \pm либо $+$, либо $-$ во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдет выражение 5 ± 1 , а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдет выражение $(2 \pm 0, 5) \pm 0, 5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны любые 100 различных действительных чисел?
3. В таблице $m \times n$ стоят числа $+1$ и -1 , причём изначально ровно одна клетка содержит -1 , а остальные $+1$. За ход можно выбрать клетку с -1 , заменить её на 0 и одновременно умножить на -1 все соседние по стороне клетки. Для каких (m, n) независимо от начального положения единственного -1 можно получить таблицу из одних нулей?
4. В выпуклом шестиугольнике равны противоположные стороны и $\angle A - \angle D = \angle C - \angle F = \angle E - \angle B$. Докажите, что его главные диагонали пересекаются в одной точке.
5. Алла нарисовала у Вани в (бесконечной) тетрадке правильный 2026-угольник. Увидев это, Ваня зачеркнул весь лист (возможно, не задев сам многоугольник) синей прямой и закрасил всё по одну сторону от неё в синий цвет. Теперь Алла может спросить про любую точку (не обязательно принадлежащую многоугольнику), синяя ли она. За какое наименьшее количество вопросов Алла сможет гарантированно узнать, какие вершины многоугольника оказались покрашены?
6. Турист прибыл на остров, где живут 100 волшебников, каждый из которых может быть рыцарем или лжецом. Он знает, что на момент его приезда один из ста волшебников — рыцарь (но не знает, кто именно), а остальные — лжецы. Турист может выбрать любых двух волшебников A и B и попросить A заколдовать B заклинанием *Вжух!*, которое меняет сущность (превращает рыцаря в лжеца, а лжеца в рыцаря). Волшебники выполняют просьбы туриста, но если в тот момент волшебник A — рыцарь, то сущность B действительно меняется, а если A — лжец, то не меняется. Турист хочет после нескольких последовательных просьб одновременно знать сущность хотя бы k волшебников. При каком наибольшем k он сможет добиться своей цели?
7. На праздник в детском саду пришёл Дед Мороз с четырьмя мешками конфет трёх сортов. Каждый из n детей взял по конфете из каждого мешка. Оказалось, что каждые 3 ребёнка достали из какого-то мешка конфеты всех трёх сортов. Какое максимальное количество детей могло участвовать в празднике?