Разнобой по алгебре.

1. Известно, что свободный член a_0 многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами по модулю меньше 100, а $P(20) = P(26) = 2026$. Найдите a_0.

2. Есть кусок сыра. Разрешается выбрать любое положительное $a \neq 1$ и разрезать этот кусок в отношении $1 : a$ по весу, затем разрезать в том же отношении любой из имеющихся кусков, и т.д. Можно ли действовать так, что после конечного числа разрезаний весь сыр удастся разложить на две кучки равного веса?

3. Можно ли подобрать два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами так, что $P - Q, P$ и $P + Q$ — квадраты некоторых многочленов (причём Q не получается умножением P на число)?

4. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 метров. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на a метров у себя и на b метров у соперника», где a, b — действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов один и тот же, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый), если при этом число заклинаний в наборе

(а) конечно

(б) бесконечно

5. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами такие, что $P(P(x)+x)$ является простым числом при бесконечном количестве целых x.

6. Докажите тождество

$$\frac{C_n^0}{x} - \frac{C_n^1}{x+1} + \frac{C_n^2}{x+2} - \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{x+n} = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$