Понедельник начинается в четверг

1. Дан треугольник ABC. Пусть I — центр его вписанной окружности, а P — такая точка на стороне AB, что угол PIB прямой, а Q — точка, симметричная точке I относительно вершины A. Докажите, что точки C, I, P, Q лежат на одной окружности.

2. На сторонах BC и CD прямоугольного дельтоида $ABCD$ с прямыми углами B и D отмечены точки E и F соответственно. Докажите, что прямые AE и BF перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны прямые AF и ED.

3. На меньшей дуге AB описанной окружности треугольника ABC отмечена точка X, а на стороне BC — точка Y таким образом, что прямая AB является биссектрисой угла XAY. Докажите, что окружность XYC проходит через фиксированную точку, отличную от C, и не зависящую от выбора точек X и Y.

4. CC_1 — высота остроугольного треугольника ABC. Через вершину C проведена прямая. На неё из вершин A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 (причём точка C лежит на отрезке A_1B_1) Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на окружности девяти точек треугольника ABC.

5. Дана трапеция $ABCD$. Окружность ω_1 проходит через вершины C и D, а её центр лежит на боковой стороне AB. Аналогично, окружность ω_2 проходит через A и B, а её центр лежит на стороне CD. Пусть K и L — точки пересечения этих окружностей, а T — точка пересечения диагоналей трапеции. Докажите, что точки K, L и T лежат на одной прямой.

6. В остроугольном треугольнике $ABC(AB < AC)$ точка M — середина BC, а I — центр вписанной окружности. Биссектриса внешнего угла A пересекает касательную к вписанной окружности, проведенную из точки M (и отличную от стороны BC) в точке P. Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника MIP.

7. Центр O окружности ω лежит на окружности γ. На окружности γ зафиксирована точка A, лежащая вне окружности ω. Переменная окружность, проходящая через A и O, пересекает ω в точках P и Q. Прямые OP и OQ вторично пересекают окружность γ в точках P' и Q'. Докажите, что все прямые $P'Q'$ касаются фиксированной окружности.

8. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята такая точка P, что $\angle PDA = \angle PBA$. Пусть ω_1 — вневписанная окружность треугольника PAB, лежащая напротив вершины A. Пусть ω_2 —вписанная окружность треугольника PCD. Докажите,что одна из общих касательных к ω_1 и ω_2 параллельна AD.