

## Еще один разбой по комбинаторике.

1. Среди  $n$  рыцарей каждые двое — либо друзья, либо враги. У каждого из рыцарей ровно три врага, причём враги его друзей являются его врагами. При каких  $n$  такое возможно?
2. В графе степени всех вершин хотя бы 100. Докажите, что в нем найдется простой цикл длины не менее 101.
3. На клетчатой доске лежат доминошки, не касаясь даже углами. Каждая доминошка занимает две соседние (по стороне) клетки доски. Нижняя левая и правая верхняя клетки доски свободны. Всегда ли можно пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю, делая ходы только вверх и вправо на соседние по стороне клетки и не наступая на доминошки, если доска имеет размеры
  - (а)  $100 \times 101$  клеток;
  - (б)  $100 \times 100$  клеток?
4. По краю многоугольного стола ползут два муравья. Все стороны стола длиннее 1 м, а расстояние между муравьями всегда ровно 10 см. Сначала оба муравья находятся на одной из сторон стола.
  - (а) Пусть стол выпуклый. Всегда ли муравьи смогут проползти по краю стола так, чтобы в каждой точке края побывал каждый из муравьев?
  - (б) Пусть стол не обязательно выпуклый. Всегда ли муравьи смогут проползти по краю стола так, чтобы на краю не осталось точек, в которых не побывал ни один из муравьев?
5. Рассмотрим двудольный граф с долям по 222 вершины, степень каждой вершины 3. Его рёбра раскрашены в  $k$  цветов, причем все цвета присутствуют. При каком наименьшем  $k$  можно гарантировать, что в этом графе найдется совершенное паросочетание, все ребра в котором разного цвета?
6.
  - (а) Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), после чего зритель выбирает одну из них. Далее первый участник выкладывает карты в ряд слева направо, причём выбранную зрителями кладет рубашкой вверх, а остальные — картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
  - (б) Второй фокус отличается от первого тем, что первый участник выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Могут ли и в этом случае участники фокуса так договориться, чтобы второй всегда угадывал невыложенную карту?