

ТЧ.

1. Натуральные числа d и $d' > d$ — делители натурального числа n . Докажите, что

$$d' > d + \frac{d^2}{n}$$

2. (а) Докажите, что существует число, большее 10^{2026} , которые нельзя представить в виде суммы куба и квадрата.
(б) Докажите, что при некотором натуральном N уравнение

$$w^3 + x^3 + y^3 + z^3 = N$$

имеет не менее миллиона решений в натуральных числах.

3. Докажите, что существует бесконечно много таких троек натуральных чисел (a, b, c) , что $a^{15} + b^{17} = c^{16}$.
4. Любое ли натуральное число можно превратить в квадрат, дописав между цифрами его десятичной записи не более 100 цифр (в начало и конец дописывать тоже можно)?
5. Числа m и n назовём *похожими друг на друга*, если у них совпадают множества простых делителей. Числа m и n назовём *очень похожими*, если во-первых, m и n похожи друг на друга, а во-вторых, $m + 1$ и $n + 1$ похожи друг на друга. Докажите, что пар очень похожих натуральных чисел бесконечно много.
6. На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_{100} . Затем под каждым числом a_i написали число b_i , полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди b_1, b_2, \dots, b_{100} ?