Алгебра + ТЧ

1. Пусть $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$. Найдите $\underbrace{f(f(\ldots f}_{2026\text{ раз}}(2026)\ldots))$.

2. Числовое множество M, содержащее 2003 различных числа, таково, что для любых двух различных элементов a, b из M число $a^2 + b\sqrt{2}$ рационально. Докажите, что для любого a из M число $a\sqrt{2}$ рационально.

3. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают отрицательные значения на непересекающихся интервалах. Докажите, что найдутся такие положительные числа α и β, что для любого действительного x будет выполняться неравенство $\alpha f(x) + \beta g(x) > 0$.

4. Назовём многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами маленьким, если $|f(n)| < 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких многочленов?

5. Существует ли такая бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из натуральных чисел, что произведение $a_n \cdot \ldots \cdot a_{n+9}$ делится на сумму $a_n + \ldots + a_{n+9}$ при любом натуральном n?

6. Исходно на доске написаны многочлены $x^3 - 3x^2 + 5$ и $x^2 - 4x$. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, то на доску можно добавить многочлены $f(x) \pm g(x), f(x)g(x), f(g(x))$ и $cf(x)$, где c — вещественное. Может ли при некотором n на доске оказаться многочлен $x^n - 1$?

7. Докажите, что существует ровно одна последовательность целых чисел, удовлетворяющая свойствам: $a_1 = 1, a_2 > 1, a_{n+1}^3 + 1 = a_n a_{n+2}$ при всех натуральных n.