Геометрический разнобой.

1. Окружность ω_1 проходит через вершину A параллелограмма $ABCD$ и касается лучей CB, CD. Окружность ω_2 касается лучей AB, AD и касается внешним образом ω_1 в точке T. Докажите, что T лежит на диагонали AC.

2. Внутри равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD расположена окружность ω с центром I, касающаяся отрезков AB, CD и DA. Окружность, описанная около треугольника BIC, вторично пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что прямая CE касается окружности ω.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D прямые. Точки K и M — проекции вершин A и C соответственно на прямую BD. Через точку K проведена прямая, параллельная BC и пересекающая AC в точке P. Докажите, что угол KPM — прямой.

4. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается его сторон AB, BC, CA соответственно в точках C_1, A_1, B_1. На продолжении отрезка AA_1 за точку A отмечена такая точка X, что $AX = AB_1 = AC_1$. Прямые XB_1 и XC_1 вторично пересекают ω в точках P и Q. Докажите, что PQ — диаметр ω.

5. Окружность ω, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Перпендикуляр из E на DF пересекает прямую BC в точке X, а перпендикуляр из F на DE пересекает BC в точке Y. Отрезок AD пересекает ω во второй раз в точке Z. Докажите, что описанная окружность треугольника XYZ касается ω.

6. На окружности ω выбраны точки A и B. Точка C — середина одной из дуг AB, а D — некоторая точка отрезка AB. Окружность ω_1 касается отрезков BD (в точке B_1), CD и окружности ω. Окружность ω_2 касается продолжения отрезка BD за точку B (в точке B_2), окружности ω (в точке K) и продолжения отрезка CD за точку D. Докажите, что $\angle B_1KB_2 = 90^\circ$.

7. Даны три окружности. Первая и вторая пересекаются в точках A_0 и A_1, вторая и третья — в точках B_0 и B_1, третья и первая — в точках C_0 и C_1. Пусть $O_{i,j,k}$ — центр описанной окружности треугольника $A_iB_jC_k$. Через все пары точек вида $O_{i,j,k}$ и $O_{1-i,1-j,1-k}$ провели прямые. Докажите, что эти 4 прямые пересекаются в одной точке или параллельны.