Геомка

1. В остроугольном треугольнике $ABC\,(AB < BC)$ провели высоту BH. Точка P симметрична точке H относительно прямой, соединяющей середины сторон AC и BC. Докажите, что прямая BP содержит центр описанной окружности треугольника ABC.

2. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает его стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Медиана из вершины C делит дугу PQ этой окружности пополам. Докажите, что $AC = BC$.

3. Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямые AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке X. Перпендикуляр к AC, проведённый через точку X, пересекает сторону AB в точке Y. Докажите, что прямая YA_1 делит отрезок BH пополам.

4. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $AB = 2CD$. Прямая l проходит через точку C, пересекает отрезок AB и перпендикулярна CD. Окружность с центром D и радиусом DA пересекает прямую l в точках P и Q. Докажите, что $AP \perp BQ$.

5. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC точки C_0 и B_0 — середины сторон AB и AC соответственно, O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Прямые BH и OC_0 пересекаются в точке P, а прямые CH и OB_0 — в точке Q. Оказалось, что четырехугольник $OPHQ$ — ромб. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

6. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а её диагонали — в точке Q. Известно, что описанная окружность треугольника PBC касается средней линии трапеции. Биссектриса угла P пересекает AD в точке K. Докажите, что $KQ \perp AD$.

7. M — точка пересечения диагоналей вписанного четырёхугольника, N — точка пересечения его средних линий (отрезков, соединяющих середины противоположных сторон), O — центр описанной окружности. Докажите, что $OM > ON$.

8. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность с центром в точке O_b проходит через точки A, C_1 и середину BH. Окружность с центром в точке O_c проходит через A, B_1 и середину отрезка CH. Докажите, что:

$$B_1O_b + C_1O_c > \frac{BC}{4}.$$