Разнобой по алгебре.

1. Числовое множество K, содержащее 2025 различных чисел, таково, что для любых двух различных элементов a, b из K число $a^2+b\sqrt{2}$ рационально. Докажите, что для любого a из K число $a\sqrt{2}$ рационально.

2. Вещественные числа a и b, большие 1, удовлетворяют неравенству

$$a+\frac{1}{a^2} \geqslant 5b-\frac{3}{b^2}.$$

Докажите, что $a > 5b-\frac{4}{b^2}$.

3. Натуральное число назовём *гипотенузным*, если оно может быть представлено в виде суммы двух квадратов целых неотрицательных чисел. Докажите, что любое натуральное число, большее 10, является разностью двух гипотенузных.

4. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2025 включительно. Паша и Ваня играют в игру, делая ходы по очереди; начинает Паша. За ход можно стереть с доски любое число. Игра заканчивается, когда на доске останутся два числа, обозначим их a и b. Паша выигрывает, если оба квадратных трёхчлена x^2+ax+b и x^2+bx+a не имеют целых корней. Может ли Ваня ему помешать?

5. Последовательность (a_n) задана условиями $a_1=2$, $a_n=2^{a_{n-1}}+2$ при всех $n \geq 2$. Докажите, что a_n делится на a_{n-1} при всех $n \geq 2$.

6. Сумма квадратов неотрицательных чисел a, b, c равна 48. Докажите, что

$$a^2\sqrt{2b^3+16}+b^2\sqrt{2c^3+16}+c^2\sqrt{2a^3+16} \leq 576.$$

7. Даны натуральное число n и нечётное натуральное число k. Целые числа a, b, c таковы, что $a^n+bk=b^n+ck=c^n+ak$. Докажите, что $a=b=c$.