Алгебра!

1. Вещественные числа a и b, большие 1, удовлетворяют неравенству

$$a + \frac{1}{a^2} \geqslant 5b - \frac{3}{b^2}.$$

Докажите, что $a > 5b - \frac{4}{b^2}$.

2. Натуральное число назовём гипотенузным, если оно может быть представлено в виде суммы двух квадратов целых неотрицательных чисел. Докажите, что любое натуральное число, большее 10, является разностью двух гипотенузных.

3. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2025 включительно. Паша и Ваня играют в игру, делая ходы по очереди; начинает Паша. За ход можно стереть с доски любое число. Игра заканчивается, когда на доске останутся два числа, обозначим их a и b. Паша выигрывает, если оба квадратных трёхчлена $x^2 + ax + b$ и $x^2 + bx + a$ не имеют целых корней. Может ли Ваня ему помешать?

4. Решите систему уравнений:

$$\sin^2 x + \cos^2 y = y^4,$$

$$\sin^2 y + \cos^2 x = x^2.$$

5. Решите уравнение в целых числах: $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$.

6. В ряд выписано 2025 простых натуральных чисел. Каждое, кроме крайних, отличается от одного из своих соседей на 12, а от другого — на 6. Докажите, что среди этих чисел есть равные.

7. Будем говорить, что точка плоскости (u, v) лежит между параболами $y = f(x)$ и $y = g(x)$, если $f(u) \leqslant v \leqslant g(u)$. Найдите наименьшее вещественное p, при котором выполнено следующее утверждение: любой отрезок, концы и середина которого лежат между параболами $y = x^2$ и $y = x^2 + 1$, целиком лежит между параболами $y = x^2$ и $y = x^2 + p$.

8. Таблица размером 2025×2025 заполнена ненулевыми цифрами. Среди 4050 чисел, десятичные записи которых совпадают со строками и столбцами этой таблицы, читаемыми слева направо и сверху вниз соответственно, все, кроме одного, делятся на простое число p, а оставшееся число на p не делится. Найдите все возможные значения p.