Тренировочная олимпиада

1. Докажите, что при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ выполняется неравенство

$$\operatorname{tg}(x)^{\sin(x)} + \operatorname{ctg}(x)^{\cos(x)} \geqslant 2.$$

2. В каждой клетке квадрата $n \times n$ стоит ребенок. Каждый из них смотрит в сторону одной из соседних по стороне клеток (никто не смотрит за пределы квадрата) и видит либо ухо, либо затылок ребенка, стоящего в этой клетке. Какое наименьшее число детей может видеть ухо?

3. Точка P лежит внутри остроугольного треугольника ABC. Докажите, что основания перпендикуляров из P на стороны AB и AC равноудалены от середины стороны BC тогда и только тогда, когда точки, симметричные P относительно середины стороны BC и биссектрисы угла A, лежат на одной прямой с точкой A.

4. Делитель числа n называется *маленьким*, если он не превосходит $n/10000$, и *большим* в противном случае. Конечно ли множество составных чисел, у которых произведение всех больших делителей, отличных от самого числа, равно произведению всех маленьких?

5. Докажите, что выпуклый многогранник с n вершинами нельзя разрезать менее чем на $n-3$ тетраэдра.