Разнобой по геометрии.

1. Дан треугольник ABC. На стороне AB как на основании построен во внешнюю сторону равнобедренный треугольник ABC_1 с углом при вершине $120°$, а на стороне AC построен во внутреннюю сторону правильный треугольник ACB_1. Точка K — середина отрезка BB_1. Найдите углы треугольника KCC_1.

2. На плоскости отмечено несколько точек, причем не все эти точки лежат на одной прямой. Вокруг каждого треугольника с вершинами в отмеченных точках описана окружность. Могут ли центры всех этих окружностей оказаться отмеченными точками?

3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка C_1, а на отрезке AC_1 – точка C_2 так, что треугольники ABC, C_1BA, BC_2A подобны. Докажите, что центр описанной окружности треугольника CC_1C_2 лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Третья окружность касается их обеих и пересекает прямую AB в точках C и D. Докажите, что касательные к ней в этих точках параллельны общим касательным к двум первым окружностям.

5. На диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$ взяли произвольную точку P и из нее опустили перпендикуляры PK, PL, PM, PN, PO на AB, BC, CD, DA, BD соответственно. Докажите, что расстояние от P до KN равно расстоянию от O до ML.

6. Дан тетраэдр $ABCD$. В грани ABC и ABD вписаны окружности с центрами O_1, O_2, касающиеся ребра AB в точках T_1, T_2. Плоскость π_{AB} проходит через середину отрезка T_1T_2 и перпендикулярна O_1O_2. Аналогично определяются плоскости π_{AC}, π_{BC}, $\pi_{AD}, \pi_{BD}, \pi_{CD}$. Докажите, что все эти шесть плоскостей проходят через одну точку.

7. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке S. Пусть K, L, M, N — отражения точки S относительно прямых AB, BC, CD, DA соответственно. Прямые AL и AM вторично пересекают описанные окружности треугольников SKL и SNM в точках P и Q соответственно. Докажите, что точки K, N, P, Q лежат на одной окружности.