

Геометрия

1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1 . Обозначим через B_0 середину дуги AC описанной окружности $\triangle ABC$, не содержащей B . Описанные окружности треугольников AA_1B_0 и CC_1B_0 пересекают прямые BC и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что центр вписанной окружности $\triangle ABC$ лежит на прямой PQ .
2. В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , CA и AB соответственно. Точки B_2 и C_2 — середины отрезков BA_1 и CA_1 соответственно. Точка B_3 симметрична C_1 относительно B , а точка C_3 симметрична B_1 относительно C . Докажите, что одна из точек пересечения окружностей, описанных около треугольников BB_2B_3 и CC_2C_3 лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .
3. Общие перпендикуляры к противоположным сторонам пространственного четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.
4. Точку D выбрали на стороне AC треугольника ABC , в котором $\angle C < \angle A < 90^\circ$, таким образом, что $BD = BA$. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB и AC в точках K и L соответственно. Пусть J — центр окружности, вписанной в треугольник BCD . Докажите, что прямая KL делит AJ пополам.
5. Трапеция вписана в окружность. Докажите, что сумма расстояний от любой точки окружности до середин боковых сторон не меньше диагонали трапеции.
6. Касательная к точке A описанной окружности ω прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90^\circ$) пересекает прямую BC в точке P . Точка M — середина дуги AB , не содержащей вершину C . Прямая PM пересекает ω второй раз в точке Q . Касательная к ω в точке Q пересекает прямую AC в точке K . Докажите, что $\angle PKC = 90^\circ$.
7. Дана описанная четырёхугольная пирамида $ABCD S$. Противоположные стороны основания пересекаются в точках P и Q , причем точки A и B лежат на отрезках PD и PC , а C и B на отрезках QD и QA . Вписанная сфера касается боковых граней ABS и BCS в точках K и L . Докажите, что если прямые PK и QL пересекаются, то точка касания сферы и основания лежит на BD .
8. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке E , а прямые AD и BC пересекаются в точке F . Назовём середины AB и CD точками G и H соответственно. Докажите, что прямая EF касается описанной окружности треугольника EGH .
9. Внеписанная окружность Γ треугольника ABC , соответствующая вершине A , касается сторон BC , AC и AB в точках D , E и F соответственно. Окружность AEF пересекает прямую BC в точках P и Q , M — середина AD . Докажите, что окружность PQM касается окружности Γ .

10. Прямая g проходит через вершину A описанного четырёхугольника $ABCD$ и пересекает отрезок BC и прямую CD в точках M и N соответственно. Обозначим за I_1 , I_2 и I_3 центры вписанных окружностей треугольников ABM , MNC , и NDA соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника $I_1I_2I_3$ лежит на прямой g .