Письменная отборочная олимпиада. Решения

1. На плоскости отметили треугольник ABC и провели 10 прямых, среди которых нет параллельных друг другу. Оказалось, что каждая из прямых равноудалена от каких-то двух вершин треугольника ABC. Докажите, что хотя бы три из этих прямых пересекаются в одной точке.

Решение. Заметим, что найдётся пара вершин треугольника, от которой равноудалено хотя бы 4 прямых (не умоляя общности пусть это точки A и B). Тогда каждая из этих прямых либо параллельна AB, либо проходит через середину AB. Так как параллельных AB прямой не более одной, то мы нашли 3 прямые проходящие через одну точку.

Критерии. Упущен случай параллельности стороне треугольника — не более 3 баллов.

2. Клетчатый прямоугольник с нечетными сторонами разбили по линиям сетки на прямоугольники. Докажите, что найдется хотя бы один прямоугольник разбиения, расстояния от которого до всех четырех сторон исходного прямоугольника имеют одну и ту же чётность.

Решение. Покрасим исходный прямоугольник в шахматную раскраску, тогда все его угловые клетки будут одного цвета, пускай чёрного. Тогда всего чёрных клеток больше чем белых. Значит в разбиении где-то есть прямоугольник, в котором черных клеток больше чем белых. Такой прямоугольник обязан иметь 4 чёрных угловых клетки. Так как чёрные клетки это те, чётность координат которых одинакова, этот прямоугольник как раз подходит под условие, что и требовалось.

3. Простое число $p > 2$ и натуральные числа m, n таковы, что квадрат числа p совпадает со средним арифметическим квадратов чисел m и n. Докажите, что число $2p - m - n$ является либо точным квадратом, либо удвоенным точным квадратом.

Решение. Заметим, что

$$(2p-m-n)(2p+m+n) = 4p^2 - (m+n)^2 = 2m^2 + 2n^2 - (m+n)^2 = (m-n)^2.$$

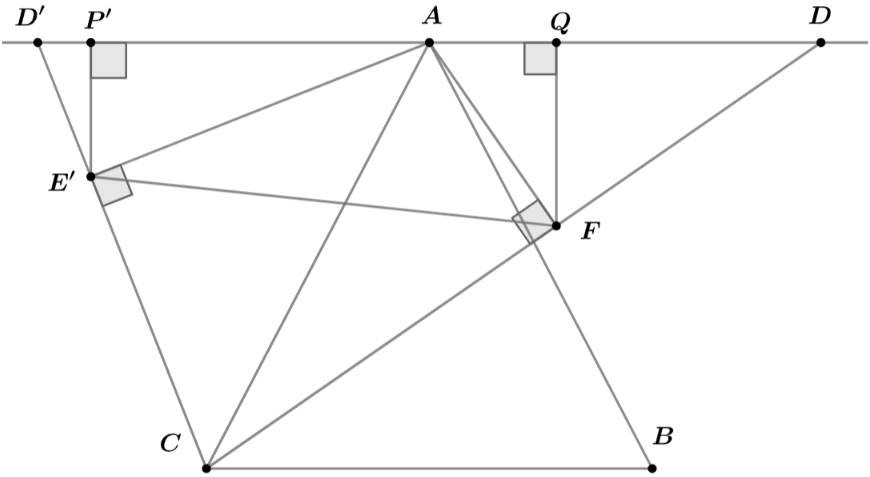
Тогда пусть есть некоторое простое q такое, что $2p-m-n \,\vdots\, q$ и $2p+m+n \,\vdots\, q$. Тогда $4p \,\vdots\, q$, т.е. $q = 2$ или $q = p$. Если $q = p$, то $m + n \,\vdots\, q$, а также $m-n \,\vdots\, q$, т.е. $m, n \,\vdots\, q$. Но так как $2p^2 = m^2 + n^2$ получаем, что $m = n = p$, в частности $2p - m - n = 0$, т.е. точный квадрат. Иначе получаем, что любое простое число, кроме, возможно, 2, входит в $(2p - m - n)$ в такой же степени, что и в $(m - n)^2$, то есть в чётной. Но тогда в зависимости от чётности степени вхождения двойки в $(2p - m - n)$ оно является либо квадратом, либо удвоенным квадратом, ч.т.д.

Критерии. Получена формула $(2p-m-n)(2p+m+n)=(m-n)^2$ — 3 балла.

4. Пусть l — прямая, проходящая через вершину A равнобедренного треугольника ABC параллельно его основанию BC, а D — произвольная точка на прямой l. Обозначим за E и F проекции точки A на прямые BD и CD соответственно, а за P и Q — проекции точек E и F на прямую l. Докажите, что $AQ+AP \leq AB$.

Решение. Отразим точки D, E, P относительно серединного перпендикуляра к BC, получим точки D', E', P'. Тогда $AQ+AP=AQ+AP'=QP'$. Так как QP' — проекция отрезка $E'F$ на прямую l имеем $QP' \leqslant E'F$. Четырёхугольник $AFCE'$ — вписанный с диаметром AC, тогда $E'F \leqslant AC$ (хорда меньше диаметра). Итого

$$AQ+AP=QP' \leqslant E'F \leqslant AC=AB.$$



Критерии. Присутствует идея отразить рисунок относительно серединного перпенидкуляра к BC — 1 балл.

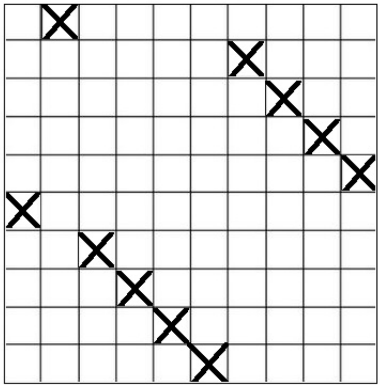
5. Фигура «Большооой крест» состоит из двух клетчатых прямоугольников 1×2025 с общей центральной клеткой. При каком наименьшем k можно вырезать из доски 4050×4050 k клеток так, чтобы из оставшейся части нельзя было вырезать «Большооой крест»?

Ответ. 2026.

Решение. Заметим, что все возможные центры "большииих"крестов — это клетки центрального квадрата 2026×2026.

Оценка. Если вырезанных клеток меньше 2026, то в одном из центральных 2026 столбцов их нету, а также в одной из центральных 2026 строк их нету, следовательно на пересечении этой строки и столбца можно поставить крест.

Пример. В центральном квадрате 2026×2026 вырежем клетки с координатами $(1014, 1), (1013, 2), (1012, 3), \ldots, (3, 1012)$, далее $(2026, 1014), (2025, 1015)$, $\ldots (1015, 2025)$,и наконец отметим клетки $(1, 1013)$ и $(2, 2026)$. Легко видеть, что любая клетка центрального квадрата теперь не может быть центром креста, что и требовалось. (На рисунке изображён пример для доски 18×18 крестов из прямоугольников со стороной 9 и центрального квадрата 10×10.)



Критерии. Только оценка — 2 балла.

Только пример — 4 балла.

6. Докажите, что при каждом натуральном n число решений уравнения $\alpha + 2\beta + 2\gamma + 3\delta = n$ в натуральных числах равно числу решений в натуральных числах уравнения $a + b + c + d = n$, где $a > b > d$ и $a > c > d$.

Решение. Построим биекцию между двумя этими множествами. А именно, сопоставим каждом решению первого уравнения решение второго следующим образом:

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{cases} if \quad \alpha \geqslant \delta, & (\alpha + \beta + \gamma, \beta + \delta, \gamma + \delta, \delta) \\ if \quad \alpha < \delta, & (\delta + \beta + \gamma, \beta + \delta, \gamma + \delta, \alpha) \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что образ этого отображения является решением второго уравнения. Чтобы убедиться, что оно является биекцией, построим обратное отображение:

$$g(a, b, c, d) = \begin{cases} if \quad b + c \leqslant a + d, & (a - c - b + 2d, b - d, c - d, d) \\ if \quad b + c > a + d, & (d, a - c, a - b, b + c - a) \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что это действительно является отображением из множеств решений второго уравнения в множество решений первого, более того f и g являются обратными друг к другу. Следовательно f это биекция, что и требовалось.