Алгебраический разнобойчик

1. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.

2. Пусть $M = x_1, \ldots, x_{30}$ — множество, состоящее из 30 различных положительных чисел; $A_n (1 \leqslant n \leqslant 30)$ — сумма всевозможных произведений различных n элементов множества M . Докажите, что если $A_{15} > A_{10}$, то $A_1 > 1$.

3. Про натуральные числа x, y и z известно, что НОД$(x, y, z) = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$. Докажите, что x, y и z — квадраты натуральных чисел.

4. На каждой из бесконечного числа карточек написано натуральное число, причем для любого n имеется ровно n карточек, на которых написаны его делители. На скольких карточках написано число 2025?

5. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Найдите все значения $x \geqslant 0$, при которых для любого $B > 0$ выполняется неравенство

$$1 + \frac{n}{B} \leqslant \left(1 + \frac{1}{B}\right)\left(1 + \frac{1}{B + x}\right)\left(1 + \frac{1}{B + 2x}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{B + (n-1)x}\right).$$

6. Существуют ли два многочлена с целыми коэффициентами такие, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2015, но у произведения этих двух многочленов модули всех коэффициентов не превосходят 1?